COURS
DE
GÉOMÉTRIE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE SUPÉRIEUR

PAR

M. H.enri ANDOYER, 1862 —

MAÎTRE DE CONFÉRENCES ET CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

OUVRAGE RÉDIGÉ

conformément au programme officiel de 1893

ET PRÉCÉDÉ D'UNE PRÉFACE

DE M. J. TANNERY

SOUS-DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES
A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

TROISIÈME ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN

BELIN FRÈRES

RUE DE VAUGIRARD, 52

1896

Tout exemplaire de cet ouvrage, non revêtu de notre griffe, sera réputé contrefait.

Belin Frères

SAINT-CLOUD. — IMPRIMERIE BELIN FRÈRES.

PRÉFACE

En ouvrant cette nouvelle « Géométrie », que M. Andoyer a écrite pour les élèves des *Ecoles primaires supérieures*, plus d'un lecteur, peut-être, se demandera tout d'abord en quoi cette Géométrie diffère des autres, et si elle s'adresse à ces élèves-là plutôt qu'à d'autres ; j'essaierai, tout à l'heure, de répondre à ces questions ; je voudrais aussi m'expliquer sur les *ressemblances* que ce livre présente avec d'autres ouvrages, faits sur le même sujet, pour une autre catégorie d'élèves, et sur la façon dont, à ce que je crois, un maître peut se servir d'un livre, dans l'enseignement des sciences.

Ces ressemblances, tout d'abord, faut-il tant les regretter? Tout doit-il différer dans les différents ordres de notre enseignement, et faut-il enfermer dans une muraille qu'on ne doit franchir ni d'un côté, ni de l'autre, tout ce qui se rapporte à l'enseignement primaire, idées, méthodes, livres, élèves et maîtres? A coup sûr, ceux qui ont essayé d'organiser l'enseignement primaire supérieur ne l'ont pas cru : ils pensent, probablement, que l'égalité est une chimère, mais ils ne seraient pas fâchés s'ils réussissaient à réaliser quelque continuité, au moins dans les intelligences. Le jour où cette continuité existerait, où chacun trouverait à côté de soi, un peu au-dessus, ou un peu au-dessous, quelqu'un qui le comprît, qui parlât sa langue, qui s'intéressât aux mêmes idées, qui eût des aspirations voisines des siennes, le jour où l'on ne saurait plus distinguer entre les classes sociales, ces classes auraient peut-être cessé d'exister.

Quoi qu'il en soit, pour ce qui est des sujets scientifiques, il y a deux manières de les enseigner. On peut se borner à décrire des faits, des résultats, à faire apprendre des règles. C'est cette marche que l'on suit quand on s'adresse à des enfants qui ne peuvent prolonger leurs études, et que les nécessités de la vie guettent au sortir de l'école : on court au plus pressé, on leur donne les armes indispensables ; on choisit parmi les résultats acquis ceux qui ont le plus d'im-

portance pratique, et l'on s'efforce de les faire comprendre en eux-mêmes, sans en expliquer l'enchaînement, sans en exposer la théorie. Posséder ces résultats, ce n'est pas rien: il n'est pas inutile de savoir comment on fait une division, comment on mesure un champ, ni de savoir que les eaux souillées sont le véhicule de certaines maladies, si même on ignore les théories de l'arithmétique, de la géométrie, ou de la microbiologie. Mais si ces connaissances sont très utiles dans la vie, quand elles restent isolées, elles servent peu pour le développement de l'intelligence.

C'est ce développement de l'intelligence, en même temps que les connaissances utiles, que l'on a eu en vue en créant les écoles primaires supérieures; dès lors, en organisant ce nouvel enseignement, on ne pouvait demander aux maîtres de se borner à la pure affirmation des faits, à de simples énoncés, à des règles mécaniques: on a voulu que les faits, les énoncés, les règles fussent reliés, enchaînés, justifiés: cela, c'est de la théorie. Et la théorie, malgré tout, on ne peut guère la changer: voici plus de deux mille ans qu'on enseigne la géométrie ; les efforts des savants et des professeurs n'ont changé que peu de chose à cet enseignement. C'est, si je ne me trompe, un pédagogue grec qui répondait aux plaintes de je ne sais quel prince, son élève : « Il n'y a pas de chemin royal en géométrie. » Aujourd'hui encore, la géométrie ne connaît pas de classes sociales; il n'y a pas une géométrie particulière pour les petits nobles, les petits bourgeois ou les enfants du peuple: tous ceux qui l'apprennent doivent se fatiguer aux mêmes abstractions, aux mêmes subtilités, peiner dans le même chemin aride, tortueux et encombré dans les commencements ; tous doivent avoir confiance dans le maître quand il dit que le but vaut bien le mal qu'on se donne pour l'atteindre.

Ceux qui ont rédigé les programmes avaient bien conscience de ces difficultés ; ils n'ignoraient pas que les élèves pour lesquels ils travaillaient n'avaient point une vie à consacrer à des spéculations curieuses ou sublimes ; ils n'ont pas cherché à donner à ces élèves le goût de ces spéculations; ils ont simplifié de leur mieux, élagué ce qu'ils ont pu ; il y avait une limite qu'ils ne pouvaient dépasser ; j'ajoute qu'ils sont restés un peu en deçà.

Ils n'avaient pas, en effet, à tenir seulement compte de la nature même des choses, pour réduire les programmes à ce

qu'ils jugeaient strictement nécessaire. On se plaint souvent, et non sans raison, de l'élévation de ces programmes, de leur longueur, de leur uniformité. Les besoins sont-ils les mêmes partout ? Suivant les carrières auxquelles se destinent les jeunes gens, ne vaudrait-il pas mieux développer ici l'arithmétique ou la géométrie, là la physique ou la chimie, ou l'histoire naturelle ? Ne vaudrait-il pas mieux laisser les maîtres juges des besoins, des aptitudes de leurs élèves : pourquoi leur imposer partout, du nord au midi, les mêmes programmes, les mêmes heures d'enseignement ? La réponse à ces questions ne serait pas douteuse s'il n'y avait ni examens, ni concours. Mais peut-on, par exemple, supprimer les concours aux écoles professionnelles ? N'est-il pas juste que n'importe quel enfant, où qu'il soit né, puisse s'y préparer s'il est intelligent et laborieux. Ces concours ont des programmes très élevés, parfois, peut-être, trop élevés ; il fallait bien en tenir compte, même pour ceux des élèves qui ne sont pas encore dans la section qui prépare directement aux concours : s'ils ne sont pas encore dans cette section, ils y entreront, peut-être, l'an prochain ; il faut discerner ceux qui seront capables de le faire, les y aider ; malgré tout, préparer quelqu'un à entrer dans une classe qui prépare à une école, c'est déjà le préparer un peu à cette école.

Voilà pourquoi les programmes de l'enseignement primaire supérieur sont un peu plus élevés, peut-être, que quelques bons esprits ne l'auraient souhaité, pourquoi l'on trouve dans la Géométrie de M. Andoyer ce que l'on trouve dans d'autres géométries, et pourquoi elle est plus grosse que l'auteur ne l'aurait voulu.

Ce livre, pourtant, a été bien réellement écrit pour les élèves des écoles ; on sent que l'auteur est constamment préoccupé de l'application, et de l'application précise, prochaine, immédiate. Trop souvent, le professeur qui enseigne les éléments de la géométrie n'a en vue que le développement des théories ultérieures ; c'est à ces théories qu'il a hâte d'arriver pour s'y mouvoir plus à l'aise. Il ne s'attarde point à montrer, à chaque pas, tout le parti qu'on peut tirer de ce qu'on vient d'apprendre ; il dédaigne les petites applications qu'on en peut faire et qui n'ont pas grand intérêt pour lui. Ce dédain est souvent excessif, lors même que l'enseignement des éléments n'a pour but que d'initier les élèves aux parties plus élevées de la science. Quand l'élève vient

d'appliquer un théorème à un exemple, il se rend tout au moins un compte très exact de son énoncé ; après quelques applications de ce genre, l'énoncé se fixe dans son esprit, avec une signification précise : l'élève en sait non seulement les termes, mais la portée ; il pourra, de temps en temps, oublier une démonstration, le fait lui-même restera gravé dans sa tête : c'est là ce qui importe. M. Andoyer a, en particulier, multiplié les applications numériques, et j'ajouterai qu'il en a traité un grand nombre avec un soin extrême. Beaucoup des élèves qui auront son livre entre les mains ne se préoccuperont guère de savoir que l'auteur est un excellent astronome, leurs professeurs ne pourront manquer de s'apercevoir qu'ils ont affaire à quelqu'un qui sait ce que c'est qu'un calcul numérique, qui sait ce que l'on peut faire sortir des données et comment on peut en tirer le meilleur parti. Cette science-là est plus rare qu'on ne croit. Qu'on lise, par exemple, les *Notions de trigonométrie*, qui figurent, comme le veulent d'ailleurs les programmes, à la fin de la géométrie plane. L'élève qui aura bien compris ces trente petites pages sera réellement en mesure de résoudre un triangle : il connaîtra les précautions qu'il faut prendre pour avoir des résultats aussi approchés que les données le comportent. A la fin du volume, il trouvera une petite table qui lui donnera les valeurs naturelles des six lignes trigonométriques, avec une précision très suffisante pour les besoins de la pratique, puisqu'elles permettent d'avoir un angle à une minute près. Et pourquoi, dira-t-on, les six lignes trigonométriques? Le sinus, le cosinus et la tangente ne suffisaient-ils pas ? Oui, sans doute, au point de vue théorique ; mais, quand on veut faire un calcul numérique, il n'est pas sans intérêt d'éviter les divisions et de les remplacer par des multiplications ; voilà pourquoi M. Andoyer a fait figurer dans sa table les inverses du sinus, du cosinus et de la tangente. Il y a dans nos écoles, aussi bien qu'ailleurs, des enfants qui ont la curiosité éveillée ; quelques-uns se demanderont sans doute comment on peut bien construire une pareille table ; ils trouveront la réponse dans leur *Géométrie*. Il ne pouvait être question d'expliquer comment on la construit réellement, ni même de répéter les explications, longues et surannées, que l'on donne habituellement, à ce sujet, dans les trigonométries ; c'est cependant une grande satisfaction pour l'esprit que de comprendre tout au moins la possibilité de résoudre

le problème : M. Andoyer s'est donné la peine d'expliquer comment, par le même procédé qui peut servir à calculer la longueur de la circonférence d'un cercle dont on connaît le rayon, on peut aussi calculer la longueur d'un arc dont on connaît la corde, ou, inversement, la longueur de la corde qui sous-tend un arc que l'on connaît en degrés, minutes et secondes.

Et maintenant, comment faut-il se servir de ce livre ? On me permettra de dire d'abord, en général, comment, à mon avis, on doit se servir des livres dans l'enseignement des sciences. C'est une grosse question que celle-là, et qui a bien des côtés.

Quelques-uns rejettent absolument les livres : l'enseignement, disent-ils, doit être exclusivement oral ; rien ne vaut la parole du maître, la parole vivante, qui prête sa vie aux choses, qui se précipite lorsqu'il s'agit de choses aisées ou déjà sues, qui devient lente, solennelle au besoin, quand il s'agit de vérités plus difficiles ou plus importantes, qui se colore, revêt toutes les nuances, se refroidit ou s'échauffe, qui se renouvelle et recommence, jusqu'à ce que le maître voie dans l'attitude de ses élèves qu'ils ont compris ce qu'on leur enseigne. Et l'on ajoute : si le maître est lié par un texte, quelle personnalité mettra-t-il dans son enseignement, quel intérêt y apportera-t-il ? L'enseignement sera figé dans un moule uniforme et invariable; il ne s'y réalisera plus aucun progrès. Ne dédaignez pas ces progrès ; leur somme n'est pas négligeable ; il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à ce qu'était l'enseignement scientifique il y a trente ou quarante ans ; et puis, ils rehaussent le professeur à ses propres yeux, ils lui donnent l'illusion d'être un savant ; quand il retournera dans sa classe, après avoir « arrangé » ingénieusement quelque démonstration, il apportera dans sa leçon une ardeur, une joie intellectuelle qui se communiquera à ses élèves et dont ils profiteront : ceux-ci ne seront pas sans remarquer ce que leur maître leur a apporté de nouveau ; son autorité grandira, et l'autorité du maître c'est la certitude du succès.

Tout cela est vrai, tellement vrai qu'il faut dire tout d'abord que le professeur qui préfère donner un enseignement exclusivement oral doit rester libre de le faire ; il y a longtemps que cet enseignement, dont l'habitude est entrée dans nos mœurs scolaires, donne de bons résultats ; personne ne souhaite qu'il disparaisse.

Mais il convient de regarder d'autres faces de la question. Il y a sur les diverses matières scientifiques de bons livres faits avec soin et conscience par des professeurs éprouvés, quelquefois par de vrais savants, qui n'ont pas dédaigné de montrer qu'ils s'intéressaient à l'enseignement. Les professeurs qui enseignent dans les écoles, dans les collèges, dans les lycées, se croient-ils supérieurs à ces auteurs? Assurément non : sur quelques points particuliers, sans doute, ils peuvent mieux faire ; mais pour le fonds, pour l'ensemble, ils n'ont nullement cette prétention. Or, en fait, le prétendu enseignement oral consiste très souvent à substituer tout simplement un cours *dicté* à un livre imprimé. Est-il vrai que le professeur précipite ou ralentisse sa parole, qu'il en change l'expression, qu'il en nuance le timbre? Non, il parle, malgré lui, d'une façon égale et monotone, parce que, autrement, les élèves ne pourraient pas *prendre des notes*. Prendre des notes, cela sonne bien : c'est écrire sous la dictée qu'il faut entendre. Et comment les élèves feraient-ils autrement? Prendre des notes, c'est choisir dans ce que le maître dit, c'est juger ce qu'il dit. Pour cela, il faudrait déjà savoir, ou au moins tout comprendre avec une sûreté et une rapidité qu'il est déraisonnable de demander aux commençants : on peut, tout au plus, essayer de leur donner lentement, petit à petit, une habitude assurément précieuse : il y faut beaucoup de patience et de talent, et il convient d'ajouter que l'habitude de prendre des notes n'acquiert tout son prix que pour ceux qui suivront plus tard un enseignement élevé, où la leçon orale s'impose. Donc, trop souvent, le maître parle sans accent : s'il s'échauffe, l'élève docile, qui ne peut le suivre, pose sa plume et regarde la bouche bée, d'autres frottent le plancher de leurs pieds ; le maître sourit ou se fâche, et reprend son ton égal et monotone ; alors l'élève, satisfait de pouvoir écrire à son aise, aligne machinalement ses mots et suit la dictée sans écouter autrement la parole qui le berce et endort son activité ; plus tard, il essaiera de comprendre, de comprendre ce qu'il y a dans un cahier, au lieu de comprendre ce qui est dans un livre ; où est le bénéfice, et ne m'a-t-on pas accordé que, en général, le livre vaut bien ce qu'il y a dans le cahier? Pour le travail personnel, pour l'activité intellectuelle, la classe a été entièrement perdue, et la vertu propre de l'enseignement oral, que l'on vantait tant, s'est trouvée nulle.

Mais, parmi ceux qui préconisent l'usage des livres, qui donc a jamais parlé de supprimer cet enseignement ? Qui a jamais conseillé au maître, quel qu'il soit, de dire à ses élèves, « pour la prochaine leçon, vous apprendrez de la page tant à la page tant, » et de leur faire réciter ensuite cette leçon, comme s'il s'agissait d'une fable de La Fontaine ? Je ne crois pas, pour ma part, que l'usage bien entendu d'un livre favorise en rien la paresse du maître.

Que celui-ci, tout d'abord, choisisse un livre qui lui plaise, en général ; s'il y a quelques pages, ici ou là, qui ne soient pas de son goût, ce n'est pas un grand inconvénient. Qu'il explique ensuite ce livre ; ce sera la vraie leçon ; pendant ce temps, les élèves ne prendront que quelques notes, très courtes ; ils feront, de leur côté, les calculs ou les figures. Le maître parlera à son aise, sans être gêné par le bruit égal des plumes qui courent sur le papier, ou par les silences soudains qui se font parfois : il parlera en *mettant le ton*. Qu'il regarde ces élèves, pour voir s'ils comprennent, et non s'ils écrivent ; qu'il recommence s'il n'est pas compris ; qu'il développe ou qu'il abrège, suivant les cas. Qu'il s'interrompe, qu'il fasse reprendre ou continuer une démonstration, qu'il fasse collaborer ses élèves à son enseignement. Ceux-ci, au sortir de la classe, sauront à moitié leur leçon ; en relisant leur livre, où les choses sont dites d'une façon peut-être plus sèche et plus concise, les explications de leur maître se représenteront à leur esprit, l'accent de sa parole retentira encore dans leurs oreilles, ils comprendront, ils sauront bientôt. A la leçon suivante, le maître interrogera ; il s'assurera que la leçon précédente est bien sue, bien comprise ; il fera faire des applications, des problèmes ; il en aura le temps qui, autrement, lui manquait. Aura-t-il moins de peine que s'il avait *dicté* son cours ? Tous ceux qui ont un peu la pratique de l'enseignement savent bien le contraire : rien n'est plus fatigant que d'interroger, de suivre à la fois sa propre pensée et celle des autres.

Et si, parfois, le maître juge qu'une démonstration de son auteur est mauvaise ou imparfaite, lui sera-t-il défendu de la changer, et de trouver là cette légitime satisfaction d'amour-propre, cet accroissement de la confiance de ses élèves dont on parlait plus haut ? En aucune façon, et s'il a beaucoup d'originalité dans l'esprit, ou qu'aucun livre ne le satisfasse, qu'il en compose un lui-même, ou

bien qu'il fasse autographier son cours; tout cela est souhaitable.

Je vais un peu plus loin encore; quand les élèves sont déjà entraînés, quand le sujet est débrouillé ou facile, je trouve bon que le maître leur fasse apprendre dans le livre des choses qu'il n'a pas expliquées, soit qu'il ait consacré le temps de sa leçon à expliquer un point particulier sur lequel il voulait insister davantage, soit même qu'il n'ait fait aucune leçon. Il importe d'habituer les élèves à apprendre les choses dans un livre, seuls, sans le secours du maître. Cela est bien plus important encore que de savoir prendre des notes. Leurs maîtres, les élèves vont les quitter; ne devront-ils plus accroître leurs connaissances, ou même, tout simplement, apprendre à nouveau ce qu'ils ont déjà appris? Ils n'auront plus d'autre ressource que le livre, le livre muet. Apprenez-leur donc à s'en servir, et hâtez-vous, le temps que vous avez à donner à vos élèves est compté; bientôt, elle va leur manquer, cette merveilleuse suggestion de la parole du maître, de cette parole qui pénètre les durs cerveaux, qui les fait vibrer, qui fait croire qu'ils pensent à ceux qui écoutent. J'ai rencontré, plus d'une fois, des jeunes gens à qui cette suggestion avait été fatale, qui, habitués à un enseignement oral trop parfait, en avaient gardé une sorte de paresse intellectuelle, à qui l'excitation de la parole du maître manquait, comme celle de l'alcool au buveur, et qui ne trouvaient plus aucun goût à la science des livres.

J'ajouterai que l'usage du livre permet de donner à l'enseignement plus de souplesse. Le maître qui fait sa leçon, et qui entend que les élèves se bornent à cette leçon, est obligé de la composer pour la moyenne de ses auditeurs: pour une bonne partie de ses élèves, il dépasse la mesure, ou ne l'atteint pas. S'il se sert d'un livre, il peut doser la matière suivant les intelligences et le but à atteindre, dire aux uns « vous apprendrez ceci », aux autres, « vous pourrez passer cela ».

Dans ces conditions, l'usage d'un livre n'a pas d'inconvénient, même s'il est un peu trop complet, et le maître, s'il a quelque psychologie et quelque initiative, peut remédier à l'uniformité des programmes.

Je n'ai plus que quelques mots à ajouter, et qui concernent particulièrement le livre de M. Andoyer : il est précisément de ceux qui ne dépassent pas les programmes, mais qui ne restent pas au-dessous, et ce que je viens de dire, en général,

trouve ici son application. Le maître, en général, devra *choisir*, indiquer à ses élèves, qui ne peuvent le savoir, ce qui est essentiel, indispensable, et ce qui est d'ordre plus élevé : il examinera attentivement les *Exercices*, auxquels l'auteur a apporté un soin très particulier; il dira à tous, « faites ces applications qui sont faciles, » à quelques-uns, « acharnez-vous après ces problèmes, vous ne perdrez pas votre temps et vous aiguiserez votre esprit, vous accroîtrez vos forces ». Il aura parfois à développer certaines remarques, qui ne sont, sous une forme modeste, ni sans philosophie, ni sans profondeur. Qu'il lise, par exemple, les premières pages, et il trouvera quelques principes de logique scientifique, qui ne présenteront pour lui aucune difficulté, mais qui effraieront peut-être un débutant. Il rassurera ce dernier, il lui dira, « attendez un peu, allez en avant, et nous verrons bientôt, à l'occasion, ce que l'auteur a voulu dire, pourquoi il a placé ces remarques au début, et comment elles évitent d'ennuyeuses et de continuelles redites ». Ce livre, composé par un véritable savant, n'est pas fait pour que l'élève se passe du maître ; que celui-ci s'en convainque, et je suis sûr qu'il tirera le meilleur parti de la Géométrie de M. Andoyer.

Paris, le 3 mai 1894.

Jules TANNERY.

GÉOMÉTRIE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

§ 1er. — Définitions et généralités.

1. — Une portion limitée quelconque de l'espace est un *volume*. C'est ainsi qu'on appelle volume d'un corps la portion de l'espace occupée par ce corps.

Une portion quelconque d'un volume est elle-même un volume : ceci résulte de la définition même.

La limite d'un volume, c'est-à-dire ce qui sépare ce volume de l'espace qui l'entoure, est la *surface* de ce volume.

Une portion quelconque de la surface qui limite un volume est appelée elle-même une *surface*.

La limite d'une surface est une *ligne*.

Une portion quelconque d'une ligne est elle-même une *ligne*.

La limite ou l'extrémité d'une ligne est un *point*.

Deux lignes peuvent se rencontrer ou *se couper :* comme on peut les supposer partagées en portions limitées là où elles se coupent, il en résulte qu'elles se coupent en un point, ou que leur *intersection* est un point.

Deux lignes peuvent, d'ailleurs, se couper en plusieurs points, si elles se rencontrent plusieurs fois.

Deux surfaces peuvent, de même, se couper : comme on peut les supposer partagées en portions limitées là où

elles se coupent, il en résulte que leur *intersection* est une ligne.

Si, par exemple, on considère une poutre, les six faces de cette poutre constituent sa surface, et chacune d'elles est une surface. Ces surfaces sont limitées par leurs intersections mutuelles qui sont des lignes qu'on appelle arêtes. Les arêtes sont elles-mêmes limitées là où elles se coupent mutuellement en des points qui sont les sommets.

2. — On conçoit clairement, d'après ce qui précède, que l'on peut inversement considérer une ligne comme le lieu des positions successives d'un point qui se meut dans l'espace suivant une loi déterminée. De même, une surface peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une ligne mobile, qui peut, d'ailleurs, se déformer en même temps d'une façon continue, et chaque point de cette ligne décrit alors lui-même une ligne située sur la surface.

De même enfin, le mouvement d'une surface mobile et qui peut se déformer d'une façon continue, engendre un volume.

3. — L'ensemble formé par un certain nombre de volumes, surfaces, lignes ou points déterminés, porte le nom de *figure.*

Deux figures sont *égales*, si on peut les superposer de façon qu'elles *coïncident* dans toutes leurs parties.

La *géométrie* a pour objet l'étude des propriétés des figures, et, en particulier, la mesure de leur étendue.

4. — Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de définir certains termes employés couramment en géométrie, et plus généralement dans toutes les sciences mathématiques.

Un *axiome* est une proposition évidente.

Un *théorème* est une proposition dont la vérité n'apparaît clairement qu'à la suite d'un raisonnement appelé *démonstration.*

Un *corollaire* est une proposition dont la vérité résulte presque immédiatement d'un théorème qu'on vient de démontrer.

Un *lemme* est un théorème préliminaire à l'aide du-

quel on peut démontrer un théorème plus important.

Un *problème* est une question qu'il faut résoudre.

5. — En général, dans une proposition, on peut distinguer une *hypothèse* et une *conclusion*. Considérons, par exemple, l'énoncé suivant : *Si deux angles adjacents ont leurs côtés extérieurs en ligne droite, ils sont supplémentaires;* l'hypothèse est que les deux angles adjacents donnés ont leurs côtés extérieurs en ligne droite ; la conclusion qui résulte de cette hypothèse après démonstration, est que les deux angles donnés sont supplémentaires.

Une telle proposition étant donnée, on peut énoncer trois autres propositions qui s'en déduisent de la façon suivante :

1° Si l'on prend pour hypothèse et pour conclusion respectivement la conclusion et l'hypothèse de la proposition directe donnée, on forme la proposition *réciproque* de cette dernière.

Exemple : la réciproque de la proposition citée plus haut s'énonce ainsi :

Si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs sont en ligne droite.

2° Si l'on prend pour hypothèse et pour conclusion respectivement les contraires de l'hypothèse et de la conclusion de la proposition directe donnée, on forme la proposition *contraire* de cette dernière.

Exemple : la proposition contraire de la proposition citée plus haut s'énonce ainsi :

Si deux angles adjacents n'ont pas leurs côtés extérieurs en ligne droite, ils ne sont pas supplémentaires.

3° Si l'on prend pour hypothèse et pour conclusion respectivement les contraires de la conclusion et de l'hypothèse de la proposition directe donnée, on forme la proposition *réciproque contraire* de cette dernière.

Exemple : la proposition réciproque contraire de la proposition citée plus haut s'énonce ainsi :

Si deux angles adjacents ne sont pas supplémentaires, leurs côtés extérieurs ne sont pas en ligne droite.

Cette proposition est à la fois réciproque de la propo-

sition contraire et contraire de la proposition réciproque.

On voit immédiatement que deux propositions réciproques ou contraires l'une de l'autre ne sont pas nécessairement vraies ou fausses en même temps. Mais les propositions réciproque et contraire d'une proposition donnée sont nécessairement vraies ou fausses en même temps, de même que la proposition directe et sa proposition réciproque contraire.

Si, par exemple, on admet comme vraie la proposition envisagée plus haut, la proposition réciproque contraire sera vraie aussi nécessairement : car, si les deux angles donnés non supplémentaires pouvaient avoir leurs côtés extérieurs en ligne droite, ils seraient supplémentaires, d'après la proposition directe; l'hypothèse faite, conduisant à une absurdité, doit être rejetée, et par suite les deux angles ne peuvent pas avoir leurs côtés extérieurs en ligne droite.

Remarquons encore qu'une proposition peut souvent être énoncée sous la forme type que nous venons d'envisager de plusieurs façons différentes : elle est alors susceptible de plusieurs propositions réciproques ou contraires, dont les unes peuvent être vraies et les autres fausses.

Ainsi, nous démontrerons le théorème suivant : *Si deux triangles sont égaux, leurs côtés et leurs angles sont égaux chacun à chacun*. Entre autres réciproques, on peut énoncer les deux suivantes :

1° Si deux triangles ont leurs côtés égaux chacun à chacun, ils sont égaux;

2° Si deux triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun, ils sont égaux.

La première de ces deux propositions est vraie, la seconde est fausse.

§ 2. — **La ligne droite et le plan.**

6. — La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite*, dont chacun de nous a une claire notion, et dont

un fil tendu (un fil à plomb en équilibre, par exemple) nous présente l'image.

On dit souvent, par abréviation, une droite au lieu d'une ligne droite.

Axiome

Deux points déterminent une droite.

Ce n'est là, en effet, qu'une façon particulière de préciser la notion que nous avons de la ligne droite, et qui nous montre clairement que par deux points on peut faire passer une ligne droite et une seule ; que, par suite, deux droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue, et que deux droites distinctes ont, au plus, un point commun.

Nous concevons immédiatement la ligne droite comme prolongée indéfiniment dans les deux sens, et, à moins que le contraire ne soit spécifié, nous supposerons toujours les droites illimitées dans les deux sens.

En géométrie, on indique un point par une lettre, une droite par deux lettres correspondant à deux de ses points : ainsi, on dit la droite AB (*fig.* 1).

Fig. 1.

Une ligne et généralement une figure quelconque est désignée par autant de lettres qu'il faut pour éviter toute ambiguïté.

Une *demi-droite* AB (*fig.* 2) est une ligne droite illimitée dans un sens seulement, et terminée par suite en un point A qu'on appelle l'*origine* de la demi-droite. Pour désigner une demi-droite, on énonce la lettre de son origine suivie de la lettre qui correspond à l'un quelconque d'un de ses points.

Fig. 2.

Un *segment* de droite AB (*fig.* 3) est une ligne droite limitée en deux points. On le désigne en nommant successivement les lettres de ses deux extrémités. Si, pour une raison quel-

Fig. 3.

conque, on est amené à considérer le segment AB comme décrit par un point mobile se mouvant dans un sens déterminé, de A vers B par exemple, alors le point A est appelé l'*origine* du segment, et B en est l'*extrémité;* en le désignant, on énonce en premier lieu la lettre de l'origine.

7. — L'étendue d'un segment de droite est sa *longueur.* On confond souvent dans le langage les sens des mots segment et longueur.

Il est facile de comparer deux segments donnés AB et CD, en remarquant que deux droites quelconques peuvent être amenées à coïncider entièrement, directement ou après retournement, et ne cessent pas de coïncider par glissement. Faisons coïncider les droites indéfinies AB et CD, de façon que les demi-droites AB et CD coïncident elles-mêmes. Le point D occupera alors une certaine position D′ sur la droite AB, et D′ sera du même côté de A que B. Si D′ coïncide avec B, les segments sont égaux; si D′ est entre A et B, le segment CD est plus petit que le segment AB (c'est le cas de la figure 4); si D′ est au delà du point B, le segment CD est plus grand que le segment AB.

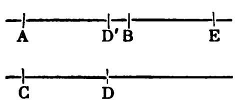


Fig. 4.

Si l'on porte CD sur la droite AB, à la suite de AB en BE, le segment AE est la *somme* des deux segments AB et CD; inversement, BE ou CD est la *différence* des segments AE et AB.

Pour abréger, nous emploierons les signes de l'algèbre, et nous écrirons:

$AB = CD$	que l'on énonce	AB égale CD ou égal à CD;
$AB > CD$	—	AB plus grand que CD ou supérieur à CD;
$AB < CD$	—	AB plus petit que CD ou inférieur à CD;
$AE = AB + CD$	—	AE égale AB plus CD;
$CD = AE - AB$	—	CD égale AE moins AB.

Nous ferons de même dans tous les cas analogues.

Si l'on avait à chercher le résultat de plusieurs additions

ou soustractions successives de segments, on répéterait autant de fois qu'il serait nécessaire les opérations que nous venons d'indiquer.

8. — Une ligne *brisée* ou *polygonale* est la figure formée par une suite de segments de droite, dont chacun a pour origine l'extrémité du précédent. La ligne ABCDE (*fig.* 5) est une ligne brisée; AB, BC... sont les *côtés* de la ligne; les points A et E en sont les *extrémités;* les points B, C, D en sont les *sommets*.

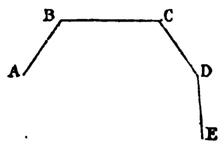


Fig. 5.

La longueur de la ligne brisée est la somme des longueurs de chacun de ses côtés.

9. — Une ligne qui n'est ni droite ni brisée est une *ligne courbe*, ou simplement une *courbe*. Un fil très fin, affectant une forme quelconque, nous offre l'image d'une courbe.

Considérons une ligne quelconque AMB (*fig.* 6), et imaginons un fil très fin, parfaitement flexible et inextensible, affectant exactement la forme de cette ligne. Supposons, maintenant, que ce fil soit tendu : il aura la forme d'un segment de droite A'B' [1] dont les extrémités correspondront aux extrémités A et B de la ligne donnée. La longueur du segment A'B' est appelée la longueur de la ligne AMB.

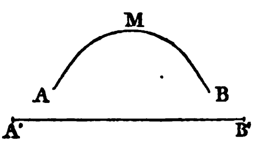


Fig. 6.

Cette définition est légitime, car, si la ligne devient droite ou brisée, la longueur de cette ligne définie plus haut est la même que celle qui résulte de notre nouvelle définition.

Il est donc possible de comparer les longueurs de deux lignes quelconques, et nous pouvons énoncer l'axiome suivant :

---

1. Lisez A prime, B prime; de même A'' s'énonce A seconde, etc.

Axiome

La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

La vérité de cette proposition est, en effet, intuitive d'après la définition de la longueur d'une ligne quelconque.

10. — La plus simple de toutes les surfaces est le *plan*, dont une glace polie nous présente l'image, et dont la définition suivante répond à l'idée que nous nous en faisons :

Le plan est une surface telle que toute droite qui joint deux points de cette surface y est contenue tout entière.

C'est ainsi que, pour s'assurer qu'une surface est plane, on vérifie qu'on peut y appliquer, sans laisser de vide, et dans tous les sens, une règle bien dressée.

Nous concevons le plan comme illimité dans tous les sens.

Si l'on considère une droite tracée sur un plan, elle le partage en deux parties : chacune d'elles est un *demi-plan*.

Comme deux droites, deux plans peuvent être amenés en coïncidence directement ou après retournement, et ils ne cessent pas de coïncider par glissement dans tous les sens.

Une surface peut être composée de portions de plans : elle est alors appelée surface *brisée* ou *polyédrique*.

Toute autre surface est une surface *courbe*.

11. — Par une droite, on conçoit qu'on puisse faire passer une infinité de plans.

Théorème

Par une droite AB et un point C en dehors de cette ligne, on peut faire passer un plan et un seul (*fig.* 7).

Imaginons, en effet, un plan quelconque passant par AB, et faisons-le tourner autour de AB comme charnière

jusqu'à ce qu'il contienne le point C. Nous avons alors un plan P passant par la droite AB et le point C : faisons voir qu'il n'en existe pas d'autre remplissant les mêmes conditions.

Remarquons d'abord que tout plan contenant la droite AB et le point C contient aussi les droites AC et BC d'après la définition du plan.

Supposons maintenant qu'il existe un second plan P′ répondant à la question, et soit M un point quelconque de ce plan. Menons par M dans le plan P′ une droite qui coupe les droites AC et BC aux points Q et R; la droite QR appartient tout entière au plan P puisque les deux points Q et R, pris sur AC et BC, appartiennent à ce plan; donc, le point M appartient aussi au plan P. Tout point M du plan P′ étant situé dans le plan P, le plan P′ coïncide avec le plan P, c. q. f. d. [1].

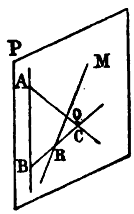


Fig. 7.

12. **Corollaires.** — 1° *Par trois points* A, B, C, *non en ligne droite, on peut faire passer un plan et un seul;* c'est celui qui passe par la droite AB et le point C.

2° *Par deux droites* AB, AC *qui se coupent, on peut faire passer un plan et un seul:* c'est celui qui passe par la droite AB et le point C quelconque de la droite AC.

13. — La géométrie se divise en deux parties: la *géométrie plane*, dans laquelle on s'occupe des figures planes, c'est-à-dire situées dans un seul et même plan, et la *géométrie dans l'espace*, dans laquelle on considère des figures disposées d'une façon quelconque dans l'espace.

1. Lisez: ce qu'il fallait démontrer.

GÉOMÉTRIE PLANE

LIVRE PREMIER

LA LIGNE DROITE

§ 1er. — Les angles.

14. — Un *angle* est la figure formée par deux demi-droites AB, AC qui ont la même origine A (*fig.* 8).

Le point A est le *sommet* de l'angle; les demi-droites AB, AC en sont les *côtés*.

On désigne un angle par la lettre de son sommet, s'il ne doit pas en résulter d'ambiguïté; dans le cas contraire, c'est-à-dire si plusieurs angles ont le même sommet, on désigne un angle par trois lettres : une sur chacun des côtés et une au sommet, qu'on énonce entre les deux autres. Ainsi, dans la figure 8, on dira l'angle A, et dans la figure 9 on dira l'angle BAC, ou l'angle BAD, ou l'angle CAD.

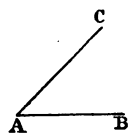


Fig. 8.

Deux angles sont *adjacents* s'ils ont le même sommet et un côté commun, et si, en outre, ils sont situés de part et d'autre du côté commun. Ainsi (*fig.* 9) les angles BAC, CAD sont adjacents; les angles BAC, BAD ne sont pas adjacents.

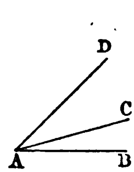


Fig. 9.

15. — Il est facile de comparer deux angles donnés BAC, EDF (*fig.* 10).

Portons le second sur le premier, de façon que DE

coïncide avec AB et que les deux angles soient situés du même côté de AB. La demi-droite DF occupera alors une certaine position AF′; si AF′ coïncide avec AC, les deux angles sont égaux; si AF′ tombe entre AB et AC (c'est le

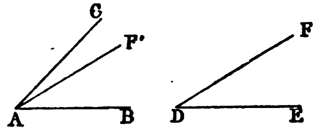


Fig. 10.

cas de la figure), l'angle EDF est plus petit que l'angle BAC; si AF′ tombe en dehors de l'angle BAC, l'angle EDF est plus grand que l'angle BAC.

On écrira, suivant les cas,

$$E\hat{D}F = B\hat{A}C,\ E\hat{D}F < B\hat{A}C,\ E\hat{D}F > B\hat{A}C,$$

le signe ^ indiquant qu'il s'agit d'un angle.

16. — Considérons deux angles quelconques BAC, EDF (*fig.* 11) et faisons un angle GAC, adjacent à l'angle BAC

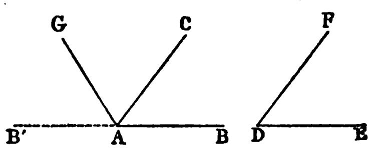


Fig. 11.

et égal à l'angle EDF. Si la demi-droite AG tombe du même côté que AC de la droite indéfinie B′AB, l'angle BAG est dit la *somme* des deux angles donnés, et l'on écrit

$$B\hat{A}G = B\hat{A}C + E\hat{D}F.$$

Inversement, l'angle CAG ou EDF est la *différence* des deux angles BAG et BAC.

Si, au contraire (*fig.* 12), les demi-droites AG et AC sont situées de part et d'autre de la droite BB′, la somme des deux angles donnés n'est plus représentée par un angle.

On dira que les deux angles donnés ont la même somme

que deux autres angles LMN, PQR, si, en portant ces deux angles l'un à la suite de l'autre, à partir de la demi-droite AB et dans le même sens de rotation que précédemment en BAH, HAK, la demi-droite ainsi obtenue AK coïncide avec AG. Si, en tournant autour du point A dans

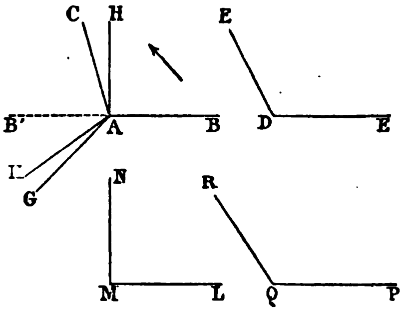


Fig. 12.

le sens adopté, qui est celui de la flèche, on rencontrait la demi-droite AK avant la demi-droite AG (c'est le cas de la figure), la somme des angles LMN, PQR serait plus petite que celle des angles donnés. Elle serait, au contraire, plus grande que cette dernière somme, si l'on rencontrait la demi-droite AG avant la demi-droite AK.

On pourra comparer de même la somme de plusieurs angles donnés à celle de plusieurs autres angles donnés. En particulier, ces deux sommes seront égales, si, en portant les angles de chacune des séries l'un à la suite de l'autre, à partir d'une demi-droite commune et dans le même sens de rotation, on arrive finalement à une même demi-droite, après avoir tourné le même nombre de fois autour de l'origine.

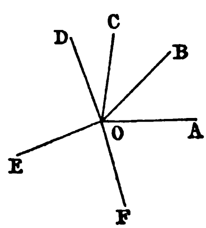


Fig. 13.

C'est ainsi que l'on peut écrire (*fig.* 13) :

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOD}+\widehat{DOE}+\widehat{EOF}+\widehat{FOC}=\widehat{AOD}+\widehat{DOE}+\widehat{EOA}+\widehat{AOC},$$

parce que la construction faite pour chaque série, à partir de la demi-droite OA, ramène dans les deux cas à la demi-droite OC, et chaque fois après avoir fait un tour complet autour de l'origine O.

On aurait de même:

$$A\hat{O}B + B\hat{O}C < A\hat{O}D + D\hat{O}F + F\hat{O}C,$$

bien qu'on arrive chaque fois finalement à la même demi-droite OC, parce que dans la seconde opération, c'est après avoir fait un tour complet autour de l'origine, ce qui n'arrive pas dans la première.

17. — Tout ce qui précède devient très net pour l'esprit, si l'on remarque que l'angle est une grandeur géométrique engendrée par la *rotation* continue d'une demi-droite mobile AC tournant autour de son origine A comme pivot, à partir d'une position fixe AB (*fig.* 14). L'angle BAC va en croissant constamment et d'une façon continue, quand la demi-droite AC, qui l'engendre, tourne autour du point A dans le sens de la flèche, en partant de la position AB pour arriver jusqu'à la position AB'.

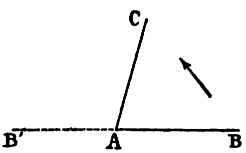


Fig. 14.

Si l'on imagine maintenant que ce mouvement de rotation de la demi-droite AC puisse se continuer indéfiniment au delà de la position AB', ce que nous avons dit plus haut sur la somme des angles devient pour ainsi dire intuitif.

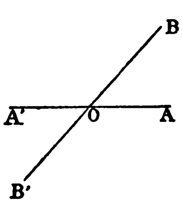


Fig. 15.

18. — Deux angles sont *opposés par le sommet* lorsque les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre. Deux droites AA', BB' qui se rencontrent en un point O (*fig.* 15), forment quatre angles qui sont deux à deux opposés par le sommet, savoir : $A\hat{O}B$ et $A'\hat{O}B'$, d'une part, AOB' et $A'\hat{O}B$, de l'autre.

Une demi-droite AC, issue d'un point A d'une droite BB'

(*fig.* 16), forme avec cette droite deux angles adjacents BAC, B′AC; en général, ces deux angles sont inégaux, et alors AC est *oblique* sur BB′. Si ces deux angles sont égaux, AC est *perpendiculaire* sur BB′.

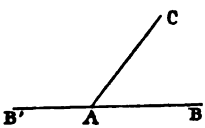


Fig. 16.

Dans tous les cas, le point A est le *pied* de la perpendiculaire ou de l'oblique.

Le théorème suivant nous montrera l'existence des perpendiculaires.

Théorème I

19. — Par un point A d'une droite BB′, et d'un côté donné de cette droite, on peut mener une demi-droite AH perpendiculaire à BB′, et l'on ne peut en mener qu'une (*fig.* 17).

Imaginons une demi-droite mobile AC qui tourne autour de A comme pivot d'un mouvement continu, de façon que, appliquée d'abord sur AB, elle vienne finalement s'appliquer sur AB′ en restant toujours du côté donné de BB′. Dans chacune de ses positions, AC forme avec BB′ deux angles adjacents BAC, B′AC; le premier va constamment en augmentant, tandis que le second va constamment en diminuant. D'ailleurs, au commencement du mouvement, le premier est plus petit que le second, tandis qu'à la fin, c'est la circonstance contraire qui se présente. Il faut donc qu'il existe une position AH telle que ces deux angles soient égaux, et cette position est unique, puisque, dès qu'elle est dépassée, le premier angle devient et reste plus grand que le second.

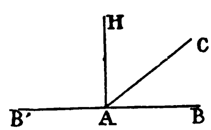


Fig. 17.

Il existe donc une demi-droite AH perpendiculaire en A sur BB′, du côté donné de cette droite, et il en existe une seule, c. q. f. d.

20. — On appelle *angle droit* un angle dont l'un des côtés est perpendiculaire sur l'autre.

THÉORÈME II

Tous les angles droits sont égaux.

Soient les deux angles droits BAC, EDF (*fig.* 18), dans lesquels on suppose AC et DF respectivement perpendiculaires sur AB et DE. Portons l'angle EDF sur l'angle BAC, de façon que les deux demi-droites DE et AB coïncident et que la demi-droite DF tombe du même côté de la droite indéfinie B'AB que AC. Dans sa nouvelle position, DF sera perpendiculaire à AB, puisque DF est perpendiculaire à DE qui coïncide maintenant avec AB. Mais AC est aussi perpendiculaire à AB ; donc, d'après le théorème précédent, la nouvelle position de DF coïncide avec AC. Les

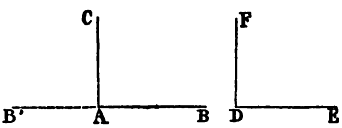


Fig. 18.

deux angles EDF et BAC sont donc superposables et, par suite, égaux, c. q. f. d.

21. — L'angle droit, étant invariable, peut servir d'étalon pour comparer les angles ou d'unité pour les mesurer.

Un angle est *aigu* ou *obtus*, suivant qu'il est plus petit ou plus grand que l'angle droit.

Deux angles dont la somme est un angle droit sont *complémentaires ;* chacun d'eux est le *complément* de l'autre.

Deux angles dont la somme vaut deux angles droits sont *supplémentaires;* chacun d'eux est le *supplément* de l'autre.

Il est clair que deux angles égaux ont des compléments ou des suppléments égaux; et que, réciproquement, deux

angles qui ont même complément ou même supplément sont égaux.

On peut évaluer les angles en prenant l'angle droit pour unité. Ordinairement, on partage l'angle droit en quatre-vingt-dix parties égales appelées *degrés;* le degré est lui-même partagé en soixante parties égales appelées *minutes*, et la minute est partagée aussi en soixante parties égales appelées *secondes*. Au lieu d'évaluer les angles en fractions d'angle droit, on les évalue en degrés, minutes, secondes et fractions décimales de seconde; on dira, par exemple, un angle de 57 degrés, 17 minutes, 44 secondes, 81 centièmes de seconde, ce que l'on écrira: $57^\circ 17' 44'',81$.

Il est indispensable de s'habituer à calculer rapidement avec ces nombres complexes, et, en particulier, de savoir écrire immédiatement le complément ou le supplément d'un angle donné.

Théorème III

22. — Si plusieurs demi-droites AC, AD, AE ont pour origine un point A d'une droite BB′ et sont situées d'un même côté de cette droite, la somme des angles consécutifs BAC, CAD, DAE, EAB′ ainsi formés, vaut deux angles droits (*fig.* 19).

Menons, en effet, du même côté de BB′ la perpendiculaire AH; d'après ce qui a été dit sur la somme des angles, la somme des angles considérés est égale à la somme des deux angles BAH, HAB′; or, ces deux angles sont droits; la somme considérée vaut donc deux angles droits, c. q. f. d.

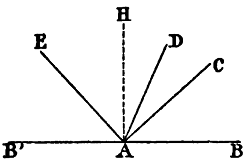


Fig. 19.

23. — En particulier, *les deux angles adjacents* CAB, CAB′ *formés par une demi-droite* AC *issue d'un point* A *d'une droite* BB′, *sont supplémentaires.*

Réciproquement, *si deux angles adjacents* CAB, CAB′

sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs sont en ligne droite (*fig.* 20).

Soit, en effet, AB″ le prolongement de AB; les deux angles CAB′, CAB″ ont tous deux pour supplément

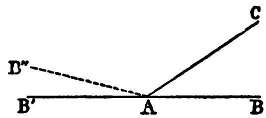


Fig. 20.

l'angle BAC, le premier par hypothèse, le second par construction, d'après la proposition précédente. Ils sont par suite égaux, et AB′ coïncide avec AB″, c. q. f. d.

Théorème IV

24. — Si plusieurs demi-droites AB, AC, AD, AE, AF ont une même origine A, et sont situées, les unes d'un côté, les autres de l'autre côté d'une quelconque d'entre elles prolongée indéfiniment en AB′, la somme des angles consécutifs formés autour du point A par ces demi-droites vaut quatre angles droits (*fig.* 21).

Il faut démontrer que l'on a:

$$\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAB} = 4^{dr}.$$

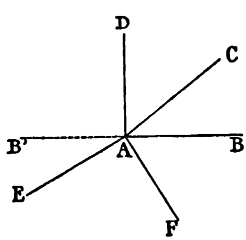


Fig. 21.

En effet, l'angle DAE étant la somme des deux angles

DAB′, B′AE, la somme qui figure au premier membre est égale à la somme des deux sommes partielles

$$\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB'} \text{ et } \widehat{B'AE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAB},$$

dont chacune vaut deux angles droits, d'après le théorème précédent. Donc, la somme totale vaut quatre angles droits, c. q. f. d.

Théorème V

25. — Si une demi-droite AC est perpendiculaire en A sur une droite BB′, il en est de même de son prolongement AC′; et inversement, les demi-droites AB, AB′ sont perpendiculaires sur la droite CC′ (*fig.* 22).

Les angles égaux BAC, B′AC sont droits; la somme des angles BAC, BAC′ vaut deux angles droits (**23**), et il en est de même de la somme des deux angles B′AC, B′AC′. Donc, les angles BAC′ et B′AC′ sont aussi égaux chacun à un angle droit, et le théorème énoncé en résulte immédiatement.

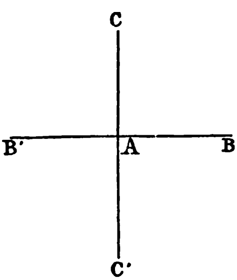


Fig. 22.

En vertu de ce théorème, on voit que les quatre angles formés par deux droites BB′, CC′ qui se coupent, sont droits dès que l'un d'entre eux est droit, et l'on dit alors que les deux droites BB′, CC′ sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

Théorème VI

26. — Deux angles BAC, B′AC′ opposés par le sommet sont égaux (*fig.* 23).

En effet, ils ont tous deux le même supplément $\widehat{BAC'}$; ils sont par suite égaux, c. q. f. d.

27. — La *bissectrice* d'un angle est la demi-droite qui le partage en deux parties égales : AD est bissectrice de l'angle BAC si les deux angles adjacents BAD, CAD sont égaux (*fig*. 24).

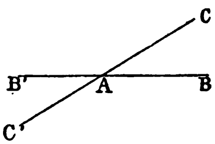


Fig. 23.

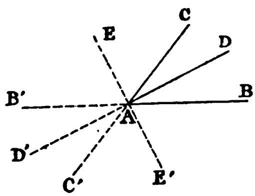


Fig. 24.

Si on prolonge les côtés AB, AC de l'angle BAC en AB' et AC', on démontrera aisément les propositions suivantes :

La bissectrice de l'angle B'AC' *est le prolongement* AD' *de* AD.

La bissectrice commune EE' *des deux angles* BAC', B'AC *est perpendiculaire sur la droite* DD'.

Théorème VII

28. — Par un point C pris hors d'une droite AA', on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et l'on ne peut en mener qu'une (*fig*. 25).

Imaginons que l'on fasse tourner le demi-plan limité par AA' et qui contient le point C autour de AA' comme charnière, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur l'autre demi-plan limité par AA'. Le point C viendra alors occuper une certaine position C'. Remettons le premier demi-plan dans sa position primitive, et joignons les points C et C' à un point quelconque D de AA' : les angles

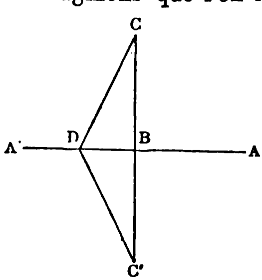


Fig. 25.

CDA, C'DA sont égaux, puisqu'ils peuvent être amenés

en coïncidence par répétition du mouvement effectué précédemment. Si CD est perpendiculaire sur AA′, l'angle CDA est droit, et par suite aussi l'angle C′DA. Les deux angles adjacents CDA, C′DA, ayant pour somme deux angles droits, leurs côtés extérieurs doivent être en ligne droite (**23**), et, par suite, le point D doit coïncider avec le point B, intersection de CC′ avec AA′. D'ailleurs, cette condition est suffisante, car les angles CBA, C′BA, étant égaux et supplémentaires, sont droits. Il existe donc une perpendiculaire et une seule issue du point C sur la droite AA′: c'est la droite CC′.

Exercices

1. — Si deux angles égaux BAC, B′AC′ de même sommet ont les côtés AB, AB′ dans le prolongement l'un de l'autre et sont situés de part et d'autre de la droite BB′, les côtés AC et AC′ sont aussi dans le prolongement l'un de l'autre.

2. — Si l'on considère quatre demi-droites, AB, AC, AD, AE de même origine, disposées comme au n° 24, et si les angles BAC, DAE sont égaux, ainsi que les angles CAD, EAB, AD est le prolongement de AB et AE est le prolongement de AC.

3. — Trois angles valent respectivement $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{21}$ d'angle droit. Quel est le supplément de leur somme? *R.* : $\frac{97}{105}$ d'angle droit.

4. — Calculer les compléments des angles suivants :

45°36′	*R.* : 44°24′
50°37′	39°23′
59°55′15″	30°4′45″
35°1′3″,78	54°58′56″,22
16°31′20″,04	73°28′39″,96.

5. — Calculer les suppléments des angles suivants :

37°59′45″,77	*R.* : 142°0′14″,23
116°44′24″,33	63°15′35″,67
21°52′20″,48	158°7′39″,52.

6. — Quelles sont les moitiés des angles suivants :

41°47′59″,84	*R.* : 20°53′59″,92
79°4′3″,08	39°32′1″,54
55°55′47″,96	27°57′53″,98.

7. — Multiplier par 3 les angles suivants :

20°53′59″,92	*R.* : 62°41′59″,76
39°32′1″,54	118°36′4″,62
27°57′53″,98	83°53′41″,94.

8. — Diviser par 15 les angles suivants :

117°23′47″,25	*R.* : 7°49′35″,15
243°58′9″,60	16°15′52″,64
337°3′18″,45	22°28′13″,23.

9. — Effectuer les opérations suivantes :

61°11′52″,08 — 21°32′57″,5 + 34°58′9″,75 — 56°19′0″,83.

R. : 18°18′3″,5.

28°55′7″,34 — 3°9′48″,39 — 7°58′7″,3 — 11°8′51″,06.

R. : 6°38′20″,59.

10. — Exprimer en degrés, minutes et secondes les fractions d'angle droit suivantes :

$\frac{1}{64}$, $\frac{5}{144}$, $\frac{649}{1000}$. *R.* : 1°24′22″,5 ; 3°7′30″ ; 58°24′36″.

§ 2. — Les triangles.

29. — Un *polygone* est une ligne brisée dont les extrémités coïncident, c'est-à-dire que le dernier des segments de droite qui constituent la ligne brisée a pour extrémité l'origine du premier. La figure 26 représente un polygone ABCDE.

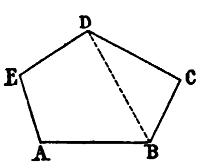


Fig. 26.

Les segments AB, BC... sont les *côtés* du polygone ; les points A, B... en sont les *sommets*, et les angles ABC, BCD,... formés en chaque sommet par les deux côtés qui y aboutissent, en sont les *angles*.

La somme des côtés d'un polygone en est le *périmètre*.

La droite limitée qui joint deux sommets non consécutifs du polygone est une *diagonale :* ainsi BD.

Un polygone a autant d'angles et de sommets que de côtés.

Le plus simple des polygones est celui de trois côtés qu'on appelle *triangle*.

De même, on donne les noms particuliers de *quadrilatère*, *pentagone*, *hexagone*, *octogone*, *décagone*, *dodécagone*, *pentédécagone*, aux polygones qui ont respectivement quatre, cinq, six, huit, dix, douze, quinze côtés. La figure 26 représente un pentagone.

Une ligne polygonale est *plane* ou *gauche*, suivant que tous ses côtés sont ou ne sont pas dans un même plan. De même, un polygone est *plan* ou *gauche*.

Nous ne considérerons actuellement que des lignes polygonales planes et des polygones plans.

Un triangle est nécessairement plan, car il est tout entier dans le plan déterminé par un de ses côtés et le sommet opposé.

30. — Une ligne polygonale plane ou un polygone plan est *convexe*, si la figure est tout entière située d'un même côté de chacun des segments de droite qui la composent,

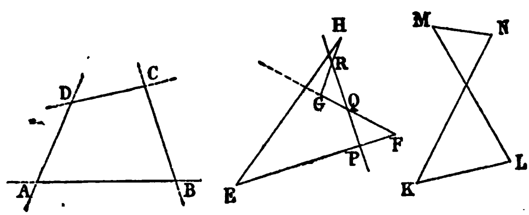


Fig. 27.

prolongés indéfiniment. Ainsi (*fig.* 27) le polygone ABCD est convexe ; les polygones EFGH, KLMN ne le sont pas.

Une droite quelconque du plan d'une ligne polygonale ou d'un polygone convexe, rencontre cette ligne ou ce polygone en deux points au plus.

Car, s'il y avait trois points d'intersection P, Q, R, l'un d'eux, Q, par exemple, serait situé entre les deux autres ; or, ceux-ci appartiennent à la figure considérée, qui, par

suite, ne pourrait être tout entière d'un même côté du segment de droite sur lequel est situé le point Q.

Il est clair que, réciproquement, s'il n'existe aucune droite rencontrant le contour d'une ligne brisée ou d'un polygone en plus de deux points, cette figure est convexe.

On peut ajouter que, si une droite illimitée rencontre un polygone en un point qui n'est pas un sommet, elle le rencontre nécessairement en un second point, puisque la portion de plan enveloppée par le polygone est limitée.

Un triangle est nécessairement convexe.

Théorème VIII

31. — Une ligne polygonale convexe quelconque ABCD est plus petite que toute ligne enveloppante courbe ou brisée qui a les mêmes extrémités (*fig.* 28).

Prolongeons AB dans le sens AB et BC dans le sens BC, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne enveloppante en

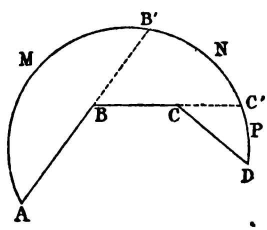


Fig. 28.

B' et C'. La ligne droite étant le plus court chemin d'un point à un autre, on aura :

$$AB + BB' < \text{ligne } AMB',$$
$$BC + CC' < BB' + \text{ligne } B'NC',$$
$$CD < CC' + \text{ligne } C'PD.$$

Ajoutant membre à membre ces inégalités de même

sens et supprimant les termes BB′, CC′ qui figurent dans chaque membre, il vient :

$$AB + BC + CD < \text{ligne } AMB' + \text{ligne } B'NC' + \text{ligne } C'PD.$$

C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Théorème IX

32. — Le périmètre d'un polygone convexe ABCD est plus petit que toute ligne qui l'enveloppe de toutes parts (*fig.* 29).

Prolongeons les côtés tous dans le même sens jusqu'à ce qu'ils rencontrent la ligne enveloppante en B′, C′, D′, A′. On aura, comme précédemment,

$$AB + BB' < AA' + \text{ligne } A'MB',$$
$$BC + CC' < BB' + \text{ligne } B'NC',$$
$$CD + DD' < CC' + \text{ligne } C'PD',$$
$$DA + AA' < DD' + \text{ligne } D'QA'.$$

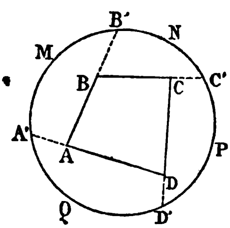


Fig. 29.

Ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens, et supprimant les termes communs aux deux membres, il vient :

$$AB + BC + CD + DA < \text{ligne } A'MB' + \text{ligne } B'NC' + \text{ligne } C'PD' + \text{ligne } D'QA', \text{ c. q. f. d.}$$

33. — Nous allons nous occuper maintenant du triangle d'une façon particulière.

Un triangle dont les trois côtés sont inégaux est dit quelquefois *scalène;* un côté quelconque que l'on veut distinguer des deux autres est la *base* du triangle, et le sommet opposé est alors le *sommet* du triangle.

Un triangle est *isocèle* s'il a deux côtés égaux; dans un triangle isocèle, on n'appelle *base* que le troisième côté, celui qui n'est égal à aucun des autres; le sommet opposé est le *sommet* du triangle isocèle.

Un triangle est *équilatéral* ou *équiangle* suivant qu'il a ses trois côtés égaux ou ses trois angles égaux.

Un triangle est *rectangle* s'il a un angle droit ; le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse* du triangle rectangle.

Les angles *extérieurs* d'un triangle sont les angles formés par un côté et le prolongement d'un autre côté.

Les perpendiculaires menées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés sont les *hauteurs* du triangle.

Les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés sont les *médianes* du triangle.

Les bissectrices des angles d'un triangle, limitées à leurs points d'intersection avec les côtés opposés, sont les *bissectrices intérieures* du triangle.

Les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle, limitées à leurs points d'intersection avec les côtés opposés, sont les *bissectrices extérieures* du triangle.

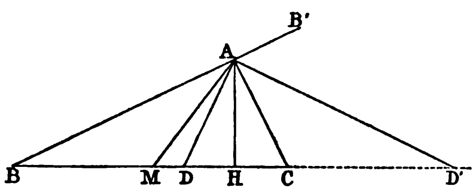


Fig. 30.

Ainsi (*fig.* 30) B'AC est un angle extérieur du triangle ABC ; AH est une hauteur, AM une médiane, AD une bissectrice intérieure, AD' une bissectrice extérieure. D'ailleurs AD et AD' sont perpendiculaires l'une sur l'autre (27).

Théorème X

34. — Dans un triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.

En effet, dans le triangle ABC (*fig.* 31), on a d'abord $BC < AB + AC$, d'après les propriétés de la ligne droite :

le côté BC est donc plus petit que la somme des deux autres.

On a de même

$$AC < BC + AB ;$$

retranchant AB aux deux membres de cette inégalité, il vient

$$AC - AB < BC, \text{ ou } BC > AC - AB ;$$

donc, BC est plus grand que la différence des deux autres côtés, c. q. f. d.

35. — Deux polygones sont égaux s'ils peuvent coïncider : ils ont alors leurs éléments égaux deux à deux et disposés dans le même ordre. Réciproquement, deux polygones sont évidemment égaux s'ils ont leurs côtés et leurs angles égaux chacun à chacun et disposés de la même façon.

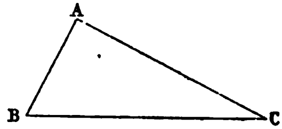


Fig. 31.

Les trois théorèmes qui suivent et qui sont connus sous le nom de *cas d'égalité des triangles* permettent d'affirmer que deux triangles sont égaux si certains de leurs éléments, convenablement choisis, sont égaux.

Théorème XI

Deux triangles sont égaux s'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

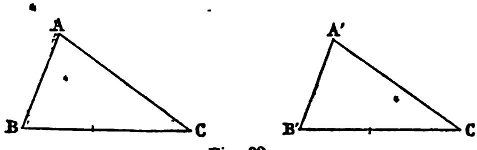


Fig. 32.

Soient les deux triangles ABC, A'B'C' (*fig.* 32), dans lesquels on suppose

$$BC = B'C', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}'.$$

Transportons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de façon que B'C' coïncide avec BC, B' tombant en B et C' en C, et que A' vienne du même côté que A de la droite BC. Les droites B'A' et C'A' prendront alors respectivement les directions BA et CA à cause de l'égalité des angles B et B', C et C'. Le point A' se trouvant sur BA et CA viendra par suite en A, et les deux triangles coïncideront : ils sont donc égaux, c. q. f. d.

Théorème XII

36. — Deux triangles sont égaux s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles ABC, A'B'C' (*fig.* 32), dans lesquels on suppose

$$\hat{A} = \hat{A}', \ AB = A'B', \ AC = A'C'.$$

Transportons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de façon que l'angle A' se superpose à son égal l'angle A, A'B' prenant la direction AB et A'C' la direction AC. En vertu des hypothèses, les points B' et C' viendront respectivement en B et C ; par suite les deux triangles coïncideront : ils sont donc égaux, c. q. f. d.

Lemme

37. — Si deux triangles ABC, A'B'C' ont deux côtés égaux chacun à chacun AB = A'B', AC = A'C', le troisième côté de l'un, BC, est supérieur, égal ou inférieur au troisième côté de l'autre, B'C', suivant que l'angle A, opposé à BC dans le premier, est supérieur, égal ou inférieur à l'angle A' opposé à B'C' dans le second (*fig.* 33).

D'après le théorème précédent, si $\hat{A} = \hat{A}'$, on a $BC = B'C'$. Considérons donc seulement le cas où les angles A et A' sont inégaux, et supposons par exemple $\hat{A} > \hat{A}'$: il faut démontrer que l'on a $BC > B'C'$. Transportons le triangle

A'B'C' sur le triangle ABC, de façon que A'B' coïncide avec AB, A' tombant en A et B' en B, et que A'C' prenne une position AD située dans l'intérieur de l'angle A, ce qui est possible d'après l'hypothèse. On aura BD = B'C', et il suffit de démontrer que l'on a BD < BC.

Menons la bissectrice AE de l'angle CAD jusqu'à sa rencontre avec BC et joignons DE. Les deux triangles CAE, DAE sont égaux d'après le théorème précédent : en effet, AE est côté commun, AC = AD puisque AD = A'C' et que l'on a par hypothèse AC = A'C' ; $\widehat{CAE} = \widehat{DAE}$ par construction. On a, par suite, CE = DE ; mais l'on a (34) BD < BE + DE ; remplaçant DE par CE, on peut écrire BD < BE + CE, c'est-à-dire BD < BC, c. q. f. d.

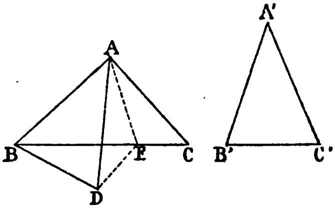


Fig. 33.

Remarque. — La démonstration ne s'appliquerait pas si le point D tombait sur la droite BC ; mais alors le théorème devient évident.

38. — Réciproquement, *si les deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun*, AB = A'B', AC = A'C', *l'angle* A *est supérieur, égal ou inférieur à l'angle* A', *suivant que le côté* BC *est supérieur, égal ou inférieur au côté* B'C'.

Supposons, par exemple, BC > B'C' : on ne peut avoir $\hat{A} = \hat{A}'$, car, alors, d'après la proposition directe on aurait BC = B'C', ce qui est contraire à l'hypothèse. Par la même raison, on ne peut avoir $\hat{A} < \hat{A}'$; on a donc, nécessairement $\hat{A} > \hat{A}'$, ainsi que l'indique l'énoncé. On raisonnerait de même dans les autres cas.

39. — D'une façon générale, on peut énoncer le principe suivant :

Si dans une série de propositions on examine toutes les hypothèses possibles, et si les conclusions correspondantes

sont toutes distinctes, les réciproques de ces propositions sont toutes vraies.

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le numéro précédent montre immédiatement la vérité de ce principe.

Théorème XIII

40. — Deux triangles sont égaux s'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

Si, en effet, les deux triangles ABC, A'B'C' ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, BC = B'C', AC = A'C', AB = A'B', l'angle A, par exemple, est égal à l'angle A', d'après la réciproque du lemme précédent (38). Les triangles sont alors égaux comme ayant un angle égal, $\hat{A} = \hat{A}'$, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, AB = A'B', AC = A'C', et le théorème est démontré.

Théorème XIV

41. — Dans un triangle isocèle :

1° Les angles opposés aux côtés égaux sont égaux ;

2° La hauteur issue du sommet est aussi médiane de la base et bissectrice de l'angle au sommet.

Soit le triangle isocèle ABC de sommet A, de sorte que AB = AC (*fig.* 34), et menons la hauteur AD. Considérons un second triangle A'B'C' identique au premier, et soit A'D' la nouvelle position de AD. Portons ce nouveau triangle sur le premier, mais en le *retournant*, de façon que, A' venant en A, le côté A'C' prenne la direction AB et le côté A'B' la direction AC, ce qui est possible puisque les angles A et A' sont égaux. Le côté A'C' est égal à AC

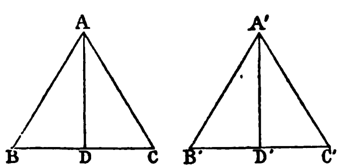


Fig. 34.

et par suite à AB, d'après l'hypothèse; donc, le point C′ viendra en B; de même, le point B′ viendra en C, de sorte que B′C′ viendra coïncider avec CB; en d'autres termes, *un triangle isocèle coïncide avec lui-même après* RETOURNEMENT. Ceci posé :

1° L'angle C′ est venu coïncider avec l'angle B; mais l'angle C′ est égal à l'angle C, donc les angles B et C sont égaux, c. q. f. d.;

2° La droite A′D′ vient coïncider avec AD puisque A′ vient en A et B′C′ en CB, et que (28) d'un point pris hors d'une droite on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette droite. Il en résulte que le segment C′D′ est venu coïncider avec le segment BD; mais C′D′ = CD, à cause de l'identité des deux triangles, donc BD = CD, c'est-à-dire que AD est la médiane de la base BC du triangle.

De même, l'angle C′A′D′ est venu coïncider avec l'angle BAD; mais les angles C′A′D′ et CAD sont égaux à cause de l'identité des deux triangles, donc les angles BAD et CAD sont égaux, c'est-à-dire que AD est la bissectrice de l'angle A du triangle.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Théorème XV

42. — Réciproquement, **un triangle est isocèle :**

1° S'il a deux angles égaux;

2° Si la hauteur issue d'un sommet est en même temps médiane du côté opposé;

3° Si la hauteur issue d'un sommet est en même temps bissectrice de l'angle du triangle qui a le même sommet.

1° Soit le triangle ABC, dans lequel on suppose $\hat{B} = \hat{C}$ (*fig.* 34); considérons un second triangle identique au premier, A′B′C′, et portons-le sur ABC, en le *retournant*, de façon que B′ vienne en C et C′ en B, ce qui est possible, puisque BC = B′C′. Puisque les angles B et C sont égaux et que l'on a $\hat{C} = \hat{C}'$, on a aussi $\hat{B} = \hat{C}'$; par suite, la droite C′A′ prendra la direction BA; de même, la droite

B'A' prendra la direction CA. Par suite, A' viendra en A, et l'on aura C'A' = BA ; d'ailleurs, on a C'A' = CA, à cause de l'identité des deux triangles. Il en résulte que BA = CA, c'est-à-dire que le triangle est isocèle, c. q. f. d.

2° Supposons que la hauteur AD soit médiane du côté BC. Soit A'B'C' un second triangle identique au premier et A'D' la nouvelle position de AD ; portons ce nouveau triangle sur ABC, en le *retournant*, de façon que A'D' coïncide avec AD ; les quatre angles en D et D' étant droits et les quatre segments BD, CD, B'D', C'D' étant égaux, D'C' viendra coïncider avec DB et D'B' avec DC. C'A' coïncidera par suite avec BA, et on en conclura, comme plus haut, BA = CA, c. q. f. d.

3° Supposons que la hauteur AD soit bissectrice de l'angle A. Soit A'B'C' un second triangle identique au premier, et A'D' la nouvelle position de AD. Portons ce nouveau triangle sur ABC, en le *retournant*, de façon que A'D' coïncide avec AD ; les quatre angles en D et D' étant droits, et les quatre angles BAD, CAD, B'A'D', C'A'D' étant égaux, A'C' prendra la direction AB, A'B' prendra la direction AC et B'C' prendra la direction BC. Par suite C' coïncidera avec B ; et l'on en conclura, comme plus haut, BA = CA, c. q. f. d.

43. **Corollaire.** — *Un triangle équilatéral est équiangle, et réciproquement.*

Théorème XVI

44. — **Dans un triangle ABC, le côté AC est supérieur, égal ou inférieur au côté AB, suivant que l'angle B opposé à AC est supérieur, égal ou inférieur à l'angle C opposé à AB ; et réciproquement** (*fig.* 35).

Si l'on suppose $\hat{B} = \hat{C}$, il en résulte AC = AB, d'après le théorème précédent.

Supposons donc les deux angles B et C inégaux, et soit $\hat{B} > \hat{C}$ par exemple ; nous allons faire voir que l'on a AC > AB. On peut mener dans l'intérieur de l'angle B

une droite BD faisant avec BC un angle CBD égal à l'angle C et coupant AC en D. Le triangle BCD est isocèle comme ayant deux angles égaux, de sorte que $CD = BD$. D'ailleurs, dans le triangle ABD, on a (34) $AB < AD + BD$; donc, puisque BD et CD sont égaux, $AB < AD + CD$, c'est-à-dire $AB < AC$, c. q. f. d.

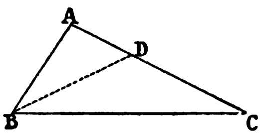


Fig. 35.

Les propositions réciproques sont vraies d'après le principe général du n° 39.

Exercices

1. — Si l'on joint aux trois sommets d'un triangle ABC un point O intérieur à ce triangle, on a, en désignant par $2p$ le périmètre du triangle :

$$\frac{OA + OB + OC}{2} < p < OA + OB + OC.$$

2. — Soit AM une médiane d'un triangle ABC; démontrer que l'on a :

$$\frac{1}{2}(AB + AC) > AM > \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

(On prolongera AM d'une longueur MA′ égale à elle-même et on considérera le triangle ABA′.)

3. — $2p$ désignant le périmètre d'un triangle et M la somme de ses trois médianes, on a :

$$\frac{M}{2} < p < M.$$

4. — $2p$ désignant le périmètre d'un quadrilatère convexe et S la somme de ses deux diagonales, démontrer que

$$p < S < 2p.$$

5. — Soit ABC un triangle isocèle de sommet A; les deux hauteurs issues de B et C sont égales; il en est de même des deux médianes, des deux bissectrices intérieures ou extérieures issues des mêmes sommets B et C.

6. — Du milieu D de la base BC d'un triangle isocèle ABC,

on mène des perpendiculaires sur les côtés égaux : démontrer qu'elles sont égales.

7. — Un triangle ABC est isocèle si la médiane et la bissectrice intérieures issues d'un sommet A coïncident. (On prolongera la médiane AD d'une longueur DA′ égale à elle-même, et on considérera le triangle ABA′.)

8. — Une perpendiculaire à la bissectrice d'un angle forme avec les côtés de l'angle un triangle isocèle.

9. — Si l'on porte sur les côtés d'un angle A deux longueurs égales AB, AB′, puis deux autres longueurs égales AC, AC′, les droites BC′, B′C se coupent sur la bissectrice de l'angle.

10. — Si l'on porte sur les côtés d'un angle A deux longueurs égales AB, AB′, puis qu'on mène par B et B′ des perpendiculaires BC, B′C′ aux côtés AB, A′B′, ces droites se coupent sur la bissectrice de l'angle.

§ 3. — Les perpendiculaires et les obliques.

Théorème XVII

45. — Si, d'un point C pris hors d'une droite AA′, on mène à cette droite la perpendiculaire CB et diverses obliques CD, CE, CF...

1° La perpendiculaire CB est plus courte que toute oblique CD;

2° Une oblique CD est supérieure, égale ou inférieure à une autre oblique CE ou CF, suivant que la distance BD du pied de la première au pied de la perpendiculaire est supérieure, égale ou inférieure à la distance BE ou BF du pied de la seconde au pied de la perpendiculaire (*fig.* 36).

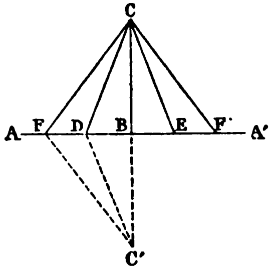


Fig. 36.

1° Prolongeons la perpendiculaire CB d'une longueur égale à elle-même BC′ et menons C′D. Dans le triangle CDC′, la hauteur DB est médiane par construction; ce triangle est donc isocèle (42), et l'on a CD = C′D. D'ail-

leurs, on a (34) $CC' < CD + C'D$; puisque $CD = C'D$, on peut écrire $\frac{1}{2} CC' < CD$ ou $CB < CD$, c. q. f. d.

2° Considérons d'abord deux obliques CD, CE s'écartant également du pied de la perpendiculaire, de sorte que $BD = BE$. Dans le triangle CDE, la hauteur CB est médiane; ce triangle est donc isocèle, et l'on a $CD = CE$, c. q. f. d.

Supposons maintenant que CD s'écarte moins du pied de la perpendiculaire que CF : deux cas se présentent, selon que CF et CD sont du même côté de la perpendiculaire ou sont de côtés différents. Dans le premier cas, menons C'D et C'F. On montrera d'abord comme plus haut que $CD = C'D$, et de même $CF = C'F$; et, comme la ligne brisée CFC' enveloppe la ligne brisée convexe de mêmes extrémités CDC', on aura (31)

$$CD + C'D < CF + C'F.$$

Comme $CD = C'D$, $CF = C'F$, on peut écrire

$$CD < CF, \text{ c. q. f. d.}$$

Le second cas se ramène au premier : car si CD s'écarte moins du pied de la perpendiculaire que CF' et si ces deux obliques sont de part et d'autre de la perpendiculaire CB, en prenant $BF = BF'$, les obliques CF et CF' seront égales, d'après ce qui a été démontré tout à l'heure, de sorte qu'on sera ramené à prouver que l'on a $CD < CF$: c'est ce que nous venons de faire.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

46. — *La perpendiculaire menée d'un point sur une droite est la ligne la plus courte qu'on puisse mener du point à la droite :* aussi l'appelle-t-on *distance* du point à la droite.

47. — Les réciproques des propositions que l'on vient de démontrer sont évidemment vraies, en vertu du principe énoncé au n° 39. On peut les énoncer ainsi : *Si l'on*

considère plusieurs droites CB, CD, CE, CF, *menées d'un point* C *à une droite* AA',

1° *Si la droite* CB *est plus courte que toute autre droite menée de* C *à* AA', *elle coïncide avec la perpendiculaire menée de* C *sur* AA';

2° *La distance* BD *du pied d'une oblique* CD *au pied de la perpendiculaire est supérieure, égale ou inférieure à la distance* BE *ou* BF *du pied d'une autre oblique* CE *ou* CF *au pied de la perpendiculaire, suivant que la première oblique* CD *est supérieure, égale ou inférieure à la seconde* CE *ou* CF.

48. Remarques. — 1° Deux obliques égales situées d'un même côté de la perpendiculaire coïncident.

2° D'un point à une droite, on ne peut pas mener plus de deux droites ayant une longueur donnée; car, s'il y en avait trois, deux d'entre elles seraient du même côté de la perpendiculaire, ce qui est impossible.

3° Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit sont plus petits que l'hypoténuse, et, par suite (44), les angles autres que l'angle droit sont aigus.

49. Définition. — On appelle *lieu géométrique* la figure formée par l'ensemble des points qui jouissent d'une propriété commune.

On peut considérer des lieux géométriques dans le plan ou dans l'espace; actuellement, il ne s'agira que de lieux géométriques dans le plan.

Pour démontrer qu'une figure est le lieu géométrique des points satisfaisant à une certaine condition, il faut démontrer deux propositions, savoir :

1° Tout point de la figure satisfait à la condition considérée;

2° Tout point en dehors de la figure ne satisfait pas à la condition considérée. Cette seconde proposition est contraire de la première; on pourra donc (5), si on le trouve plus commode, démontrer à sa place la réciproque de la première proposition, savoir :

Tout point satisfaisant à la condition considérée appartient à la figure. C'est en général ce que l'on fait.

Théorème XVIII

50. — Le lieu géométrique des points M équidistants des extrémités d'un segment de droite AB est la perpendiculaire CD élevée sur ce segment en son milieu C (*fig.* 37).

1° Tout point M de CD est équidistant de A et de B : car MA et MB sont deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire MC.

2° Tout point M équidistant de A et de B est sur la perpendiculaire CD; car MA et MB, étant deux obliques égales, s'écartent également du pied de la perpendiculaire menée de M sur AB′.

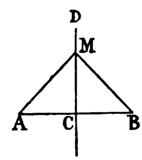


Fig. 37.

51. — Les deux théorèmes qui suivent sont connus sous le nom de *cas d'égalité des triangles rectangles*. Ce sont des cas d'égalité particuliers aux triangles rectangles, et qui ne rentrent pas dans les cas généraux déjà étudiés.

Théorème XIX

Deux triangles rectangles sont égaux s'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′ (*fig.* 38), rec-

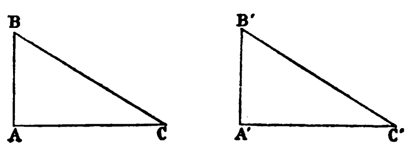


Fig. 38.

tangles en A et A′, dans lesquels on suppose $BC = B'C'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$.

Portons le second triangle sur le premier, de façon que

B′C′ coïncide avec BC, B′ venant en B, C′ en C; le côté C′A′ prendra la direction CA à cause de l'égalité des angles C et C′; B′A′, perpendiculaire à C′A′, prendra donc une direction perpendiculaire à CA, et par suite coïncidera avec BA, qui est perpendiculaire aussi sur CA (**28**). A′ viendra par suite en A, et les triangles coïncideront; donc ils sont égaux : c. q. f. d.

Théorème XX

52. — Deux triangles rectangles sont égaux s'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′ (*fig.* 38), rectangles en A et A′, dans lesquels on suppose BC = B′C′, et AC = A′C′. Portons le second triangle sur le premier, de façon que A′C′ coïncide avec AC, A′ venant en A, C′ en C, et que B′C′ tombe du même côté que BC de la droite AC. A′B′ prendra la direction AB, à cause de l'égalité des angles droits A et A′. C′B′, dans sa nouvelle position, et CB seront deux obliques égales, issues du même point et situées d'un même côté de la perpendiculaire CA à la droite AB; elles coïncideront donc (**48**), de sorte que B′ viendra en B. Les triangles coïncident, et par suite sont égaux, c. q. f. d.

Théorème XXI

53. — Le lieu géométrique des points équidistants de deux droites indéfinies BB′, CC′, qui se coupent en un point A, se compose des deux droites DD′, EE′, bissectrices des quatre angles formés en A par ces deux droites (*fig.* 39).

1° Tout point M de la droite DD′, par exemple, est équidistant des droites BB′ et CC′. Menons, du point M, les perpendiculaires MH et MK sur BB′ et CC′; les deux triangles rectangles MAH et MAK sont égaux comme

ayant l'hypoténuse AM commune et un angle aigu égal ($\widehat{MAH} = \widehat{MAK}$ par hypothèse). Donc on a $MH = MK$, c. q. f. d.

2° Tout point M équidistant des droites BB′ et CC′ est sur l'une des droites DD′ ou EE′. Si du point M on abaisse des perpendiculaires MH et MK sur BB′ et CC′, on a $MH = MK$. Les deux triangles rectangles MAH et MAK sont donc égaux comme ayant l'hypoténuse AM commune et un côté de l'angle droit égal ($MH = MK$). Par suite, les angles MAH, MAK sont égaux, et la droite AM est bissectrice de celui des quatre angles formés par les deux droites dans lequel se trouve le point M, c. q. f. d.

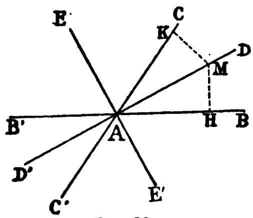


Fig. 39.

Exercices

1. — On joint un point C à un point quelconque D d'une droite AA′; montrer que l'angle CDA va constamment en augmentant ou en diminuant quand le point D décrit la droite AA′ dans le même sens. (On s'appuie sur les n^{os} 44 et 45.)

2. — Déduire de l'exercice précédent que deux triangles sont égaux s'ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun.

3. — Deux triangles ABC, A′B′C′ ont deux côtés égaux chacun à chacun, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. En outre, les angles B et B′ sont égaux. Si $AC > AB$, les deux triangles sont égaux; si $AC < AB$, les deux triangles peuvent être égaux ou non : dans ce dernier cas, les angles C et C′ sont supplémentaires.

4. — Les perpendiculaires élevées sur les côtés d'un triangle en leurs milieux sont concourantes, c'est-à-dire se coupent en un même point.

5. — Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes. La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle et les bissectrices extérieures des deux autres angles sont concourantes.

6. — Soit I le point de concours des bissectrices intérieures d'un triangle ABC; soit I′ le point de concours de la bissectrice intérieure de l'angle A et des bissectrices extérieures des

angles B et C; soient I″ et I‴ les deux autres points analogues. Montrer que le triangle I′I″I‴ a pour hauteurs les bissectrices intérieures du triangle ABC. Enoncer un théorème analogue pour chacun des triangles II″I‴, II′I″, II′I‴.

7. — Deux points A et A′ sont dits *symétriques* par rapport à une droite LL′ si LL′ est perpendiculaire sur AA′ en son milieu. Deux figures sont *symétriques* par rapport à LL′ si leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à cette droite. Démontrer que deux figures symétriques par rapport à une droite sont égales.

8. — Etant donnés deux points A et B situés d'un même côté d'une droite LL′, trouver sur cette droite un point C tel que la somme AC + BC soit la plus petite possible. (Si B′ est le symétrique de B par rapport à LL′, le point cherché C est sur la droite AB′.)

§ 4. — Les parallèles.

54. Définition. — Deux droites sont dites *parallèles* si elles sont situées dans un même plan, et si elles ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge.

55. — Les droites parallèles existent effectivement : le théorème suivant va nous le montrer.

Théorème XXII

Deux droites BB′, CC′, perpendiculaires sur une même droite AA′, sont parallèles (*fig.* 40).

Car si elles se rencontraient, on pourrait mener par leur point d'intersection deux perpendiculaires à une même droite, ce qui est impossible (28).

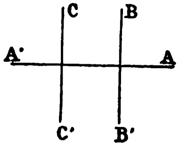


Fig. 40.

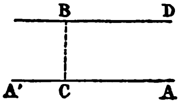


Fig. 41.

56. Corollaire. — *Par un point* B *pris en dehors d'une droite* AA′, *on peut mener une parallèle à cette droite* (*fig.* 41).

Si, en effet, on mène BC perpendiculaire sur AA′, puis BD perpendiculaire sur BC, les droites BD et AA′ seront parallèles, d'après le théorème précédent.

57. **Axiome.** — *Par un point* B *pris en dehors d'une droite* AA′, *on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite.*

Cette proposition, connue sous le nom de *postulatum d'Euclide*, résulte de l'idée même que nous avons du plan.

58. **Corollaires.** — 1° *Si une droite* AA′ *rencontre une autre droite* BB′, *elle rencontrera aussi toute droite* CC′ *parallèle à* BB′.

Sans cela, AA′ et BB′ seraient toutes deux parallèles à CC′, et, par leur point d'intersection, on pourrait mener deux parallèles à CC′, ce qui est impossible.

2° *Deux droites* BB′, CC′ *parallèles à une même droite* AA′ *sont parallèles entre elles.*

Car, si elles se rencontraient, par leur point d'intersection on pourrait mener deux parallèles à AA′, ce qui est impossible.

Théorème XXIII

59. — **Si deux droites AA′, BB′ sont parallèles, toute droite CC′ perpendiculaire sur l'une d'elles, AA′, est aussi perpendiculaire sur l'autre BB′** (*fig.* 42).

La droite CC′ coupe AA′ en D, et, par suite, BB′ en E (58). Si CC′ n'était pas perpendiculaire sur BB′, par le point E, on pourrait mener une droite distincte de BB′, perpendiculaire sur CC′, et, par suite, parallèle à AA′ (55). Donc, par le point E, on pourrait mener deux parallèles à AA′, ce qui est impossible : CC′ est donc nécessairement perpendiculaire sur BB′, c. q. f. d.

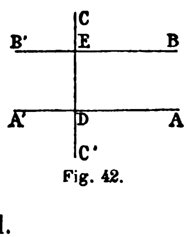


Fig. 42.

60. — Considérons deux droites AA′, BB′ et une troi-

sième droite CC′, qui les coupe en D et E (*fig.* 43). Chacun des points D et E est le sommet de quatre angles qui sont indiqués sur la figure par les numéros 1, 2,...7, 8.

Deux angles de sommets différents, situés de part et d'autre de la *sécante* CC′, et entre les deux droites AA′ et BB′, sont dits *alternes-internes :* tels sont les angles 1 et 6, ou 2 et 5.

Deux angles de sommets différents, situés de part et d'autre de la sécante et en dehors des deux droites, sont dits *alternes-externes :* tels sont les angles 3 et 8, ou 4 et 7.

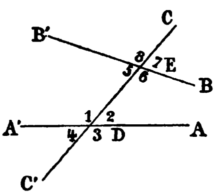


Fig. 43.

Deux angles de sommets différents, situés du même côté de la sécante, et l'un entre les deux droites, l'autre en dehors des deux droites, sont dits *correspondants :* tels sont les angles 1 et 8, ou 2 et 7, ou 3 et 6, ou 4 et 5.

Deux angles de sommets différents, situés du même côté de la sécante, et tous deux entre les deux droites ou tous deux en dehors des deux droites, sont dits *intérieurs du même côté*, tels que 1 et 5, ou 2 et 6; ou *extérieurs du même côté*, tels que 3 et 7, ou 4 et 8.

Théorème XXIV

61. — Si une sécante CC′ coupe en D et E deux droites parallèles AA′, BB′ :

1° Deux angles alternes-internes sont égaux;

2° Deux angles alternes-externes sont égaux;

3° Deux angles correspondants sont égaux;

4° Deux angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires;

5° Deux angles extérieurs d'un même côté sont supplémentaires (*fig.* 44).

Par le milieu F de DE, menons la perpendiculaire aux parallèles AA′, BB′, qui les coupe respectivement en G et H.

Les triangles rectangles DGF, EHF sont égaux (51) comme ayant l'hypoténuse égale, DF = EF par construction, et un angle aigu égal ($\widehat{DFG} = \widehat{EFH}$ comme opposés par le sommet). Les angles FDG et FEH sont donc égaux. Il en résulte que les quatre angles aigus 2, 4, 5, 7 sont égaux entre eux, puisque 4 et 7 sont respectivement opposés par le sommet aux angles 2 et 5 dont nous venons de démontrer l'égalité. Les quatre angles obtus 1, 3, 6, 8 sont par suite égaux entre eux, car chacun d'eux a pour supplément l'un des quatre angles aigus que nous venons de considérer.

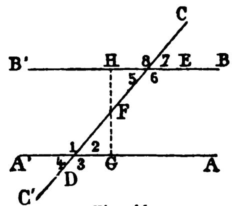


Fig. 44.

Les quatre angles aigus formés autour des points D et E étant égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus, on voit immédiatement que le théorème énoncé est complètement démontré. En effet, deux angles alternes-internes sont toujours aigus ou obtus en même temps, et par suite égaux, et il en est de même de deux angles alternes-externes ou de deux angles correspondants; au contraire, deux angles intérieurs ou extérieurs d'un même côté sont toujours l'un aigu et l'autre obtus, et par suite supplémentaires, puisque les angles aigus 2, 4, 5, 7 sont les suppléments des angles obtus 1, 3, 6, 8.

Remarque. — Si la sécante CC' était perpendiculaire sur AA' et BB', la démonstration précédente ne s'appliquerait plus ; mais le théorème ne cesse pas d'être vrai, puisque les huit angles formés autour des points D et E sont alors égaux comme droits.

Théorème XXV

62. — Réciproquement, **si deux droites AA', BB' sont coupées en D et E par une sécante CC', ces deux droites sont parallèles :**

1° Si deux angles alternes-internes sont égaux;

2° Si deux angles alternes-externes sont égaux;

3° Si deux angles correspondants sont égaux;

4° Si deux angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires;

5° Si deux angles extérieurs d'un même côté sont supplémentaires (*fig.* 45).

Plaçons-nous dans le premier cas et supposons que les deux angles alternes-internes ADE, B'ED soient égaux.

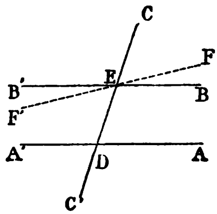


Fig. 45.

Menons par E la parallèle FF' à AA' : d'après la proposition directe, on aura ADE = F'ED ; il en résulte que les angles B'ED et F'ED sont égaux : ces angles étant situés du même côté de ED doivent coïncider, et par suite FF' coïncide avec BB' : donc BB' est parallèle à AA', c. q. f. d.

On raisonnerait de même dans les autres cas.

63. — Les propositions contraires sont vraies aussi (**5**). Signalons en particulier celle-ci :

Si deux droites AA' BB' *font avec une sécante* CC' *deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme est différente de deux angles droits, ces deux droites ne sont pas parallèles* (*fig.* 46).

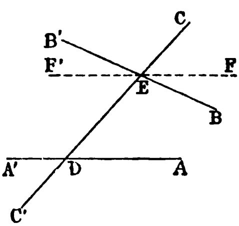


Fig. 46.

D'un côté de la sécante, cette somme est plus grande que deux angles droits, et de l'autre côté elle est plus petite que deux angles droits, car la somme des quatre angles intérieurs vaut quatre angles droits. *Les deux droites* AA', BB' *se rencontrent du côté de la sécante où cette somme est plus petite que deux angles droits.*

Menons en effet la parallèle FF' à AA' par le point E : si la somme des angles ADE et BED est inférieure à deux angles droits, l'angle BED est plus petit que l'angle FED, puisque FED est le supplément de ADE. Donc, la demi-

droite EB est entre les deux parallèles AA′ et FF′, et rencontre nécessairement la demi-droite DA.

Théorème XXVI

64. — Deux segments de droites parallèles AC, BD, compris entre deux droites parallèles AB, CD, sont égaux (*fig.* 47).

Menons AD : les triangles ABD, ACD sont égaux comme ayant un côté commun AD adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ($D\hat{A}B = A\hat{D}C$ comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD coupées par AD ; $A\hat{D}B = D\hat{A}C$ comme alternes-internes par rapport aux parallèles AC, BD coupées par AD). Donc, les côtés AC, BD, opposés aux angles égaux ADC, DAB, sont égaux, c. q. f. d.

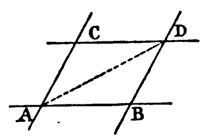


Fig. 47.

65. **Remarque.** — Si AC et par suite BD sont perpendiculaires sur AB et CD, AC et BD sont les distances des points C et D à la droite AB : ces distances étant égales, on dit que *deux parallèles sont partout à égale distance l'une de l'autre.*

Théorème XXVII

66. — Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles :

1° Sont égaux si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux dans le même sens ou deux à deux en sens contraires;

2° Sont supplémentaires si deux côtés parallèles sont de même sens et les deux autres de sens contraires (*fig.* 48).

Considérons les deux angles BAC, B′A′C′ qui ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens. Soit D le point où A′B′ coupe AC ; les angles BAC, B′DC sont égaux comme correspondants par rapport aux paral-

lèles AB, A'B' coupées par AC ; de même, les angles B'A'C', B'DC sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles AC, A'C' coupées par A'B' ; les angles BAC, B'A'C' étant égaux tous deux à l'angle B'DC, sont égaux, c. q. f. d.

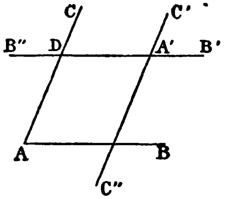


Fig. 48.

Si les deux angles BAC, B''A'C'' ont leurs côtés respectivement parallèles et de sens contraires, ils sont encore égaux, puisque l'angle B'A'C', opposé par le sommet à l'angle B''A'C'', est égal à l'angle BAC d'après ce qui précède.

Si les deux angles BAC, B'A'C'' ont leurs côtés respectivement parallèles, les uns étant de même sens et les autres de sens contraires, ils sont supplémentaires, car l'angle B'A'C'' a pour supplément l'angle B'A'C', égal à l'angle BAC, d'après ce qui précède.

Le théorème est donc complètement démontré.

Théorème XXVIII

67. — Deux angles qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires suivant qu'ils sont tous deux aigus ou obtus ou que l'un est aigu et l'autre obtus.

Supposons d'abord que les deux angles aient le même sommet, et considérons, en premier lieu, les deux angles aigus BAC, DAE (*fig.* 49), dont les côtés sont respectivement perpendiculaires : AD sur AB et AE sur AC. Ces deux angles sont égaux ; car ils ont tous deux pour complément l'angle CAD.

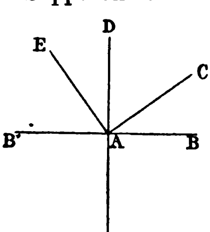


Fig. 49.

Considérons maintenant les deux angles obtus CAB', EAD' ; ils sont égaux, car ils ont pour suppléments les angles BAC, DAE, égaux d'après ce qui précède.

Considérons enfin l'angle aigu BAC et l'angle obtus

EAD′ ; ils sont supplémentaires, car le second a pour supplément l'angle DAE, égal au premier d'après ce qui précède.

Si les deux angles n'ont pas le même sommet, tels que BAC et B′A′C′ (*fig.* 50), menons par A les demi-droites AD, AE, respectivement parallèles aux côtés A′B′, A′C′ et de même sens. L'angle DAE aura ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de l'angle BAC, et, en outre, sera égal à l'angle B′A′C′ d'après le théorème précédent : l'angle B′A′C′ est donc égal à l'angle BAC ou à son supplément en même temps que l'angle DAE, et le théorème énoncé est par suite complètement démontré.

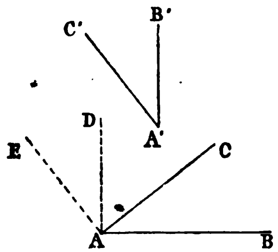


Fig. 50.

Théorème XXIX

68. — La somme des angles d'un triangle quelconque ABC est égale à deux angles droits (*fig.* 51).

Prolongeons BC en CD au delà du sommet C, et menons la parallèle CE à AB. Les angles ECD et B sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles AB, CE coupées par BC. Les angles ACE et A sont égaux comme alternes-internes par rapport aux mêmes parallèles coupées par AC. La somme des trois angles du triangle est donc la même que celle des trois angles ECD, ECA, ACB, et, par suite (**22**), vaut deux angles droits, c. q. f. d.

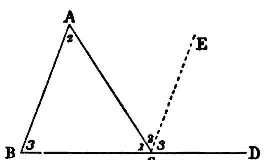


Fig. 51.

69. Remarque. — La démonstration même montre

que *tout angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.*

70. Corollaires. — 1° *Un triangle a au plus un angle droit ou obtus.*

2° *Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.*

3° Un angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres : donc, *si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, les troisièmes angles sont aussi egaux.*

Il en résulte que l'on peut remplacer le premier cas d'égalité des triangles par celui-ci qui est plus général: *Si deux triangles ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun, ils sont égaux.*

4° *Deux triangles* ABC, A'B'C', *qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun, ont leurs angles égaux.*

En effet, d'après les nos 66 et 67, les angles formés par les côtés parallèles ou perpendiculaires et que nous désignons par la même lettre avec ou sans accent, sont égaux ou supplémentaires ; de sorte que l'on peut faire les quatre hypothèses suivantes :

1°	$A + A' = 2^d$,	$B + B' = 2^d$,	$C + C' = 2^d$.
2°	$A = A'$,	$B + B' = 2^d$,	$C + C' = 2^d$.
3°	$A = A'$,	$B = B'$,	$C + C' = 2^d$.
4°	$A = A'$,	$B = B'$,	$C = C'$.

La première de ces hypothèses est impossible, puisqu'elle conduit au résultat suivant : $A + A' + B + B' + C + C' = 6^{dr}$, tandis que la somme des angles des deux triangles vaut quatre angles droits (68).

La seconde est à rejeter également, et pour une raison analogue, puisqu'elle conduit à ce résultat, $A + A' + B + B' + C + C' = 4^{dr} + A + A'$.

La troisième est impossible aussi d'après ce qui précède (3°).

La quatrième hypothèse, subsistant seule comme possible, est donc toujours vérifiée, c. q. f. d.

Théorème XXX

71. — La somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux.

Soit le polygone ABCDEF (*fig.* 52). Par le sommet A, par exemple, menons toutes les diagonales possibles AC, AD, AE ; on décompose ainsi le polygone en triangles : le nombre de ces triangles est égal au nombre des côtés du polygone moins deux, car chaque triangle contient un seul côté du polygone, sauf les triangles extrêmes ABC, AEF qui en contiennent chacun deux. D'autre part, la somme des angles du polygone est évidemment la même que celle des angles de tous ces triangles : la somme des angles d'un triangle valant deux angles droits, la somme des angles du polygone vaut autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux, c. q. f. d.

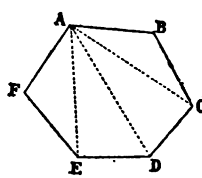


Fig. 52.

72. Corollaire. — Si n désigne le nombre des côtés du polygone, la somme de ces angles est $2^{dr} \times (n-2) = (2n-4)^{dr}$.

En particulier, la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut quatre angles droits ; si donc ces quatre angles sont égaux, chacun d'eux est droit.

Exercices

1. — Si deux segments égaux AB, CD sont situés sur deux droites parallèles, ou bien les droites AC, BD sont parallèles, ou bien elles se coupent en un point O, milieu commun de AC et de BD, et les droites AD, BC sont parallèles.

2. — Si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles, leurs bissectrices sont parallèles ou perpendiculaires.

Il en est de même pour deux angles dont les côtés sont respectivement perpendiculaires.

3. — Quel est le lieu géométrique des points qui sont à une distance donnée d'une droite donnée?

4. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants de deux droites parallèles?

5. — La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés est constante.

Comment modifier cet énoncé si le point est pris sur le prolongement de la base?

6. — Déduire de l'exercice précédent le lieu géométrique des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites données a une valeur constante donnée.

7. — La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral aux trois côtés de ce triangle est constante.

Comment modifier cet énoncé si le point est pris en dehors du triangle?

8. — Si l'on considère un triangle ABC et un point intérieur O, l'angle BOC est plus grand que l'angle BAC.

9. — Un polygone convexe ne peut avoir plus de trois angles aigus.

10. — Un polygone convexe de dix-sept côtés a tous ses angles égaux; combien vaut chacun d'eux?

11. — Connaissant les trois angles d'un triangle, calculer les angles sous lesquels se coupent deux hauteurs ou deux bissectrices; calculer aussi les angles que forment en un sommet les côtés, les bissectrices et la hauteur qui y aboutissent.

12. — Si dans un triangle rectangle l'un des angles aigus est double de l'autre, l'hypoténuse est double du plus petit côté de l'angle droit, et réciproquement.

§ 5. — Les parallélogrammes.

73. — Un *trapèze* est un quadrilatère convexe dont deux côtés opposés sont parallèles; les côtés parallèles sont les *bases* du trapèze, leur distance est la *hauteur* du trapèze.

Le trapèze est *rectangle* si l'un des côtés non parallèles est perpendiculaire sur les bases.

Le trapèze est *isocèle* si les deux côtés non parallèles sont égaux.

Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux; il est nécessairement convexe.

L'un quelconque des côtés peut recevoir le nom de *base* : la *hauteur* est alors la distance de ce côté au côté opposé.

Un *rectangle* est un quadrilatère dont les quatre angles sont égaux : chacun d'eux est, par suite, droit (**72**).

Un *losange* est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux.

Un *carré* est un quadrilatère dont les quatre angles sont égaux, et aussi les quatre côtés : c'est donc à la fois un rectangle et un losange.

Théorème XXXI

74. — Dans un parallélogramme ABCD :

1° Deux côtés opposés sont égaux;

2° Deux angles opposés sont égaux et deux angles non opposés sont supplémentaires;

3° Les diagonales se coupent mutuellement en parties égales (*fig.* 53).

En effet :

1° Deux côtés égaux AD, BC sont égaux comme parallèles comprises entre parallèles (**64**).

2° Deux angles opposés BAD, BCD sont égaux comme ayant les côtés parallèles et de sens contraires (**66**).

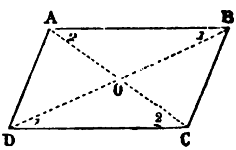


Fig. 53.

Deux angles non opposés BAD, ABC sont supplémentaires comme intérieurs d'un même côté par rapport aux parallèles AD, BC coupées par AB.

3° Les diagonales AC, BD se coupent en O. Les deux triangles AOB, COD sont égaux comme ayant un côté égal (AB = CD d'après ce qui précède) et deux angles égaux chacun à chacun ($\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD coupées par AC; $\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$ comme alternes-internes par rapport aux mêmes parallèles coupées par BD). Les côtés

opposés aux angles égaux sont par suite égaux, de sorte que $OA = OC$, et $OB = OD$, c. q. f. d.

Théorème XXXII

75. — Un quadrilatère convexe ABCD est un parallélogramme :

1° Si les côtés opposés sont égaux deux à deux;

2° Si les angles opposés sont égaux deux à deux ou les angles non opposés supplémentaires deux à deux;

3° Si deux côtés opposés sont égaux et parallèles;

4° Si les diagonales se coupent mutuellement en parties égales (*fig.* 53).

En effet :

1° Considérons les deux triangles ABC, ADC : ils sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun (AC commun, $AB = CD$ par hypothèse, et de même $AD = BC$). Les angles BAC, DCA sont par suite égaux : ces angles étant alternes-internes par rapport aux droites AB, CD coupées par AC, AB et CD sont parallèles (**62**). De même de l'égalité des angles ACB, CAD, on déduit le parallélisme des droites AD, BC. La figure ABCD est donc un parallélogramme, c. q. f. d.

2° Supposons les angles opposés égaux deux à deux, de sorte que :

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{ADC}.$$

On a aussi (**72**) :

$$\widehat{BAD} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{ADC} = 4^{dr};$$

donc on peut écrire, en prenant la moitié des deux membres et tenant compte des premières égalités :

$$\widehat{BAD} + \widehat{ABC} = 2^{dr}, \ \widehat{BAD} + ADC = 2^{dr},$$

de sorte qu'on est ramené au cas où les angles non opposés sont supplémentaires deux à deux.

Les angles BAD, ABC étant supplémentaires et inté-

rieurs d'un même côté par rapport aux deux droites AD, BC coupées par AB, AD et BC sont parallèles (**62**). De même les angles BAD, ADC étant supplémentaires, les droites AB, CD sont parallèles : la figure ABCD est donc un parallélogramme, c. q. f. d.

3° Supposons les droites AB, CD parallèles, et, en même temps, soit $AB = CD$. Les deux triangles ABC, ADC sont égaux comme ayant un angle égal ($\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD coupées par AC) compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (AC commun, $AB = CD$ par hypothèse). Par suite, les angles ACB et CAD sont égaux et la démonstration s'achève comme plus haut (1°).

4° Supposons $OA = OC$, $OB = OD$. Les deux triangles AOB et COD sont égaux comme ayant un angle égal ($\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ comme opposés par le sommet) compris entre deux côtés égaux chacun à chacun d'après l'hypothèse. Donc on a : $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$, et on en déduit, comme plus haut, le parallélisme des droites AB, CD. De même les triangles AOD, BOC sont égaux, et on en déduit le parallélisme des droites AD, BC. La figure ABCD est donc un parallélogramme, c. q. f. d.

Remarque. — Les réciproques des propositions énoncées au n° 74 sont les propositions 1°, 2° et 4° du théorème que nous venons de démontrer.

Théorème XXXIII

76. — Un rectangle ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont égales (*fig.* 54).

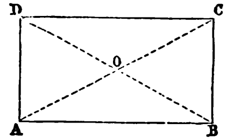


Fig. 54.

La figure est un parallélogramme, puisque les angles opposés sont égaux deux à deux comme droits (75, 2°).

Les triangles rectangles ABC, BAD sont égaux comme ayant les côtés de l'angle droit égaux (AB commun, $AD = BC$

comme côtés opposés d'un parallélogramme). Donc AC = BD, c. q. f. d.

Théorème XXXIV

77. — Réciproquement, **un parallélogramme ABCD dont les diagonales sont égales est un rectangle** (*fig.* 54).

Les triangles ABC, BAD sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun (AB commun, AD = BC comme côtés opposés d'un parallélogramme, AC = BD par hypothèse). Donc les angles ABC, BAD sont égaux; étant aussi supplémentaires comme angles non opposés d'un parallélogramme, ils sont droits, et la figure est un rectangle, c. q. f. d.

Théorème XXXV

78. — Un losange ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires l'une sur l'autre et sont bissectrices des angles (*fig.* 55).

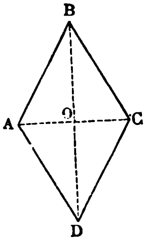


Fig. 55.

Les quatre côtés d'un losange étant égaux, les côtés opposés sont égaux deux à deux, et par suite la figure est un parallélogramme (**75, 1°**).

La diagonale BD coupe AC en son milieu O (**74, 3°**); d'ailleurs, dans le triangle isocèle ABC, la médiane BO est en même temps hauteur et bissectrice (**41**) : le théorème est donc complètement démontré.

Théorème XXXVI

79. — Réciproquement, **un parallélogramme ABCD est un losange :**

1° Si les diagonales sont perpendiculaires l'une sur l'autre;

2° Si une diagonale est bissectrice de l'un des angles dont elle contient les sommets (*fig.* 55).

En effet : 1° Dans le triangle ABC, la médiane BO est en même temps hauteur; donc AB = BC (**42**, 2°); on en déduit immédiatement que la figure est un losange.

2° Les angles ABD, BDC sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD coupées par BD; d'ailleurs, les angles ABD, CBD sont égaux par hypothèse. Les angles BDC, CBD sont par suite égaux, et l'on en conclut BC = CD (**42**, 1°); il en résulte immédiatement que la figure est un losange.

80. — Le carré étant à la fois un rectangle et un losange, on voit qu'*un carré est un parallélogramme dont les diagonales sont égales, perpendiculaires l'une sur l'autre et bissectrices des angles.*

Cette proposition est susceptible de plusieurs réciproques : nous laisserons au lecteur le soin de les énoncer et de les démontrer.

Exercices

1. — Dans un triangle rectangle, la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse, et réciproquement.

2. — Calculer les angles formés au sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle par les côtés, la hauteur, la médiane et les bissectrices qui y aboutissent.

3. — Sur les côtés d'un carré ABCD, on prend dans le même sens des longueurs égales AA', BB', CC', DD' : démontrer que la figure A'B'C'D' est un carré.

4. — Les bissectrices des angles d'un parallélogramme forment un rectangle; les diagonales de ce rectangle sont les parallèles aux côtés du parallélogramme menées par le point de rencontre de ses diagonales; elles sont égales à la différence de deux côtés adjacents du parallélogramme.

Comment modifier cet énoncé si l'on considère les bissectrices des angles extérieurs du parallélogramme.

5. — Deux points A et A' sont *symétriques* par rapport à un point O, si O est le milieu de AA'. Deux figures sont *symétriques* par rapport à un point O, si leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à O. Démontrer que deux figures planes symétriques par rapport à un point sont égales.

6. — Un point O est dit *centre* d'une figure, si les points de cette figure sont deux à deux symétriques par rapport à ce point. Démontrer que le point de rencontre des diagonales d'un parallélogramme est centre de ce parallélogramme.

7. — Tout parallélogramme inscrit dans un parallélogramme donné a même centre.

8. — Dans un trapèze isocèle, les diagonales sont égales, et les angles opposés sont supplémentaires.

9. — Par le point de rencontre I des bissectrices intérieures d'un triangle ABC, on mène une parallèle à BC, qui coupe AB en D et AC en E; démontrer que $DE = BD + CE$.

Comment modifier cet énoncé si le point I est remplacé par un des points de rencontre de deux bissectrices extérieures et d'une bissectrice intérieure?

10. — Dans un trapèze ABCD, dont la petite base AB est la moitié de la grande base CD, on mène la diagonale AD et on suppose que l'angle CAD est droit. Calculer les angles du trapèze et les côtés non parallèles.

Questions diverses

1. — La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié, et réciproquement.

(On démontrera d'abord que la parallèle FG à BC, menée par le milieu F de AB, passe par le milieu E de AC; à cet effet, on montrera que si G est le point d'intersection de FG avec la parallèle à AB menée par C, la figure AFCG est un parallélogramme.)

2. — En menant par les sommets d'un triangle des parallèles aux côtés opposés, on forme un nouveau triangle que l'on peut décomposer en quatre triangles égaux au triangle primitif.

3. — Déduire de l'exercice précédent que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

4. — Quel est le lieu géométrique des milieux des segments de droite CD obtenus en joignant un point C à un point variable D d'une droite AA'?

5. — Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point situé au tiers de chacune d'elles à partir de la base correspondante. (Les deux médianes AD et BE se coupent en M; la parallèle à BE, menée par C, coupe AD en H; on démontrera que l'on a $AM = MH$ et $MD = DH$.)

6. — Dans un triangle ABC, le point de concours O des perpendiculaires élevées sur les côtés en leurs milieux, le point

de concours G des médianes et le point de concours H des hauteurs sont trois points en ligne droite; le point G est entre les points O et H, et l'on a GH = 2GO. (Les parallèles à CH et BH, menées par B et C, se coupent en un point S; on fera voir que D étant le milieu de BC, AD et HO sont deux médianes du triangle AHS.)

7. — Montrer, en gardant les notations de l'exercice précédent, que OD est la moitié de AH.

8. — Soit ABCD un parallélogramme; M et N étant les milieux des côtés opposés AB, CD, les droites BN, DM divisent la diagonale AC en trois parties égales.

9. — Les droites qui joignent les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère forment un parallélogramme.

10. — Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère se coupent en un point qui est le milieu de chacune d'elles et le milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

11. — Dans un trapèze, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par les milieux des côtés non parallèles. La distance des milieux des diagonales est la demi-différence des bases du trapèze; la distance des milieux des côtés non parallèles est la demi-somme des bases.

12. — Soit AD une médiane d'un triangle ABC. L'angle ADB est obtus, droit ou aigu suivant que AB est supérieur, égal ou inférieur à AC, et réciproquement.

13. — Dans les mêmes conditions, l'angle BAD est supérieur, égal ou inférieur à l'angle CAD, suivant que AB est inférieur, égal ou supérieur à AC, et réciproquement.

14. — Dans les mêmes conditions, l'angle BAC est obtus, droit ou aigu suivant que AD est inférieur, égal ou supérieur à la moitié du côté BC, et réciproquement.

15. — Si AD et BE sont deux médianes du triangle ABC, AD est supérieur, égal ou inférieur à BE, suivant que BC est inférieur, égal ou supérieur à AC, et réciproquement.

16. — Si AD et BE sont deux hauteurs du triangle ABC, AD est supérieur, égal ou inférieur à BE, suivant que BC est inférieur, égal ou supérieur à AC, et réciproquement.

17. — La bissectrice extérieure de l'angle A d'un triangle ABC rencontre le côté BC en un point D situé sur la demi-droite BC ou sur la demi-droite CB prolongée, suivant que AB est supérieur ou inférieur à AC. Si AB = AC, la bissectrice considérée est parallèle à BC. Réciproques.

18. — Soit AD une bissectrice intérieure d'un triangle ABC; l'angle ADB est obtus, droit ou aigu, suivant que AB est supérieur, égal ou inférieur à AC, et réciproquement.

19. — Si deux triangles ABC, A'B'C' ont un angle égal A = A', un côté égal AB = A'B', et si les angles en B et B' sont sup-

plémentaires, le côté BC est plus grand que le côté B'C', si l'angle B est obtus.

20. — Soit AD une bissectrice intérieure d'un triangle ABC; le segment BD est supérieur, égal ou inférieur au segment CD, suivant que AB est supérieur, égal ou inférieur à AC, et réciproquement.

LIVRE II

LA CIRCONFÉRENCE

§ 1er. — Définitions. Position d'une droite par rapport à une circonférence.

81. — Le lieu géométrique des points qui sont à une distance constante donnée d'un point fixe O est une *circonférence* (*fig.* 56).

La longueur constante donnée est le *rayon*, le point O est le *centre* de la circonférence.

Sur chaque demi-droite OL issue du point O, il y a un point A et un seul appartenant à la circonférence.

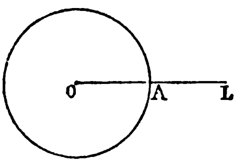


Fig. 56.

Cette remarque nous donne une idée nette de la forme de la circonférence qui est une ligne courbe *fermée.*

Le segment OA, qui va du centre à un point quelconque A de la circonférence, est un *rayon.*

Tous les rayons d'une circonférence sont égaux.

Un point est intérieur ou extérieur à une circonférence, suivant que sa distance au centre est inférieure ou supérieure au rayon ; et réciproquement.

Le *cercle* est la portion du plan qui est limitée par la circonférence.

On confond souvent dans le langage les sens des mots cercle et circonférence.

82. — *Deux circonférences* O *et* O' *de même rayon sont*

égales ; car, si on fait coïncider leurs centres, elles coïncideront nécessairement.

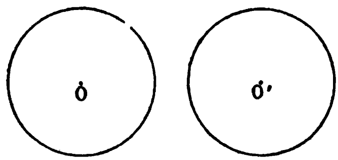


Fig. 57.

Une circonférence ne cesse pas de coïncider avec elle-même si on la fait tourner autour de son centre (*fig.* 57).

Théorème I

83. — Une droite AB ne rencontre pas une circonférence, la rencontre en un seul point ou en deux points, suivant que la distance OC du centre O à cette droite est supérieure, égale ou inférieure au rayon.

Dans le premier cas (*fig.* 58), la distance OC est supérieure au rayon, et, par suite, le point C est extérieur à la circonférence. Soit M un point quelconque de AB ;

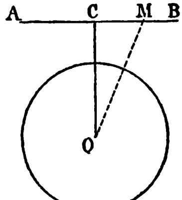


Fig. 58.

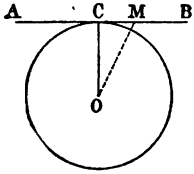


Fig. 59.

l'oblique OM est supérieure à la perpendiculaire OC (45), et, à plus forte raison, supérieure au rayon. Donc tout point de la droite AB est extérieur à la circonférence : la droite AB ne rencontre pas la circonférence.

Dans le second cas (*fig.* 59), la distance OC est égale

au rayon, et, par suite, le point C est sur la circonférence. La distance OM du centre à un point quelconque M de la droite AB est supérieure à OC (**45**), c'est-à-dire au rayon. Donc tout point de la droite AB autre que C est extérieur à la circonférence : la droite AB rencontre la circonférence en un seul point.

Dans le troisième cas (*fig.* 60), la distance OC est inférieure au rayon, et, par suite, le point C est à l'intérieur de la circonférence. Or, si un point est à l'intérieur d'une courbe fermée, il est clair que chaque demi-droite illimitée, issue de ce point, rencontre nécessairement la courbe en un point au moins. Donc, la droite AB rencontrera la circonférence en deux points D et E, et deux seulement, puisqu'on ne peut mener d'un point à une droite plus de deux obliques ayant une longueur donnée (**48**).

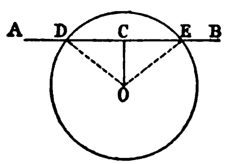


Fig. 60.

Ces deux points D et E seront de part et d'autre du point C, et à égale distance de ce point, puisque les deux obliques égales OD, OE doivent s'écarter également du pied de la perpendiculaire (**47**). Un point de la droite sera à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence, suivant qu'il sera ou non sur le segment DE, et réciproquement.

84. — Les réciproques des propositions précédentes sont vraies (**39**). On pourrait d'ailleurs les démontrer directement sans aucune difficulté.

85. — Toute droite qui rencontre une circonférence en deux points est, par rapport à cette circonférence, une *sécante;* la portion de la droite contenue à l'intérieur de la circonférence est une *corde.*

Si une courbe ne peut être rencontrée en plus de deux points par une droite illimitée quelconque, on dit qu'elle est *convexe :* la circonférence est donc une courbe convexe, puisqu'elle ne peut être rencontrée en plus de deux points par une droite.

86. — Une droite AB qui rencontre une circonférence O en un seul point C est appelée une *tangente ;* le point C

est le *point de contact* de la tangente avec la circonférence.

Des propositions énoncées ci-dessus, il résulte que :

La perpendiculaire AB, *élevée sur un rayon* OC *en son extrémité* C, *est tangente à la circonférence* O *en* C ;

Réciproquement, *une tangente* AB *à une circonférence* O *est perpendiculaire sur le rayon qui aboutit au point de contact* C (*fig.* 59).

Cette seconde proposition peut se démontrer directement de la façon suivante : un point M quelconque de AB autre que C est extérieur à la circonférence, puisque, s'il était intérieur, la droite AB serait, d'après ce qui a été dit plus haut, une sécante. Donc, la distance OM est supérieure au rayon, c'est-à-dire à OC : OC est alors la droite la plus courte qu'on puisse mener du point C à la droite AB, et par suite OC est perpendiculaire sur AB (47).

87. **Remarques.** — 1° Une tangente est tout entière à l'extérieur de la circonférence, à l'exception de son point de contact. On peut dire aussi que la circonférence est tout entière située d'un même côté de chacune de ses tangentes.

2° Par un point intérieur à une circonférence, on ne peut faire passer aucune tangente à cette circonférence.

Par un point C d'une circonférence O, on peut faire passer une tangente à cette circonférence et une seule : c'est celle qui a son point de contact en C et qui, par suite, est perpendiculaire en C au rayon OC.

§ 2. — **Les arcs et les cordes.**

88. — Un *arc* est une portion quelconque AMB de circonférence (*fig.* 61). Le segment de droite AB qui joint les extrémités d'un arc est la *corde* de cet arc : on dit que la corde *sous-tend* l'arc ou que l'arc est *sous-tendu* par la corde.

Il est facile de comparer deux arcs appartenant à deux circonférences égales ou à la même circonférence.

Soient les deux arcs AMB, CND appartenant respec-

tivement aux circonférences égales O et O′. Faisons coïncider ces deux circonférences, de façon que le point C vienne en A, et, en outre, que le sens dans lequel marche un mobile pour décrire l'arc CND, de C vers D, dans sa nouvelle position soit le même que celui dans lequel marche un mobile pour décrire l'arc AMB de A vers B. Cette opération est toujours possible, soit directement, soit après retournement du plan.

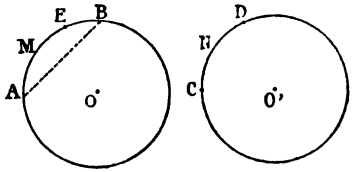


Fig. 61.

Le point D vient alors occuper une certaine position E. Si les points B et E coïncident, les arcs CND, AMB sont superposables et par suite égaux.

Si le mobile qui décrit l'arc AMB de A vers B rencontre le point E avant le point B (c'est le cas de la figure), l'arc CND égal à l'arc AME est plus petit que l'arc AMB. Au contraire, l'arc CND est plus grand que l'arc AMB, si le mobile rencontre le point B avant le point E.

89. — Considérons deux arcs AMB, CND dans deux circonférences égales O et O′ (*fig.* 62 et 63) et construisons sur la circonférence O, à la suite de l'arc AMB, un arc BPE égal à l'arc CND. Trois cas peuvent se présenter :

1° Un mobile décrivant la circonférence O dans le sens AMB rencontre le point B avant le point E (*fig.* 62). Alors la *somme* des deux arcs AMB, CND est l'arc AMPE; inversement, l'arc BPE ou son égal CND est la *différence* des deux arcs AMPE et AMB.

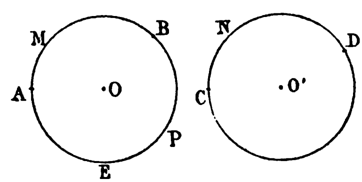


Fig. 62.

2° Un mobile décrivant la circonférence O dans le sens AMB rencontre le point E avant le point B (*fig.* 63). Alors la somme des deux arcs donnés se compose de la cir-

conférence entière AMPA augmentée de l'arc AQE.

3° Les points A et E coïncident : la somme des deux arcs donnés est alors la circonférence entière.

On obtiendra le résultat de plusieurs additions ou sous-

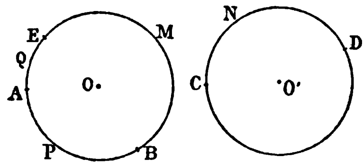


Fig. 63.

tractions successives d'arcs donnés en répétant l'une des opérations précédentes autant de fois qu'il sera nécessaire.

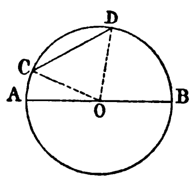


Fig. 64.

90. — Un *diamètre* d'une circonférence est une corde AB passant par le centre (*fig.* 64).

Le diamètre vaut deux fois le rayon, et par suite *tous les diamètres d'une même circonférence sont égaux.*

Le diamètre est plus grand que toute corde CD *de la même circonférence;* car, dans le triangle COD, on a $CD < OC + OD$: CD est donc plus petit que la somme de deux rayons, et par suite, plus petit que le diamètre.

Théorème II

91. — Un diamètre AB d'une circonférence O divise en deux parties égales la circonférence et le cercle (*fig.* 65).

Prenons un point C quelconque sur l'arc AMB, et menons la corde CD perpendiculaire en E sur AB. On a $CE = ED$, à cause de l'égalité des obliques OC et OD.

Faisons tourner maintenant le demi-plan AMB autour de AB comme charnière, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le demi-plan ANB.

Le point C viendra coïncider avec le point D, puisque CE = ED et que les angles en E sont droits. Ainsi, par ce mouvement, un point quelconque de l'arc AMB vient coïncider avec un point de l'arc ANB : ces deux arcs sont donc superposables, et par suite égaux, c'est-à-dire que le diamètre AB partage la circonférence en deux parties égales.

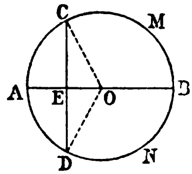


Fig. 65.

Les deux surfaces AMB, ANB sont de même superposables ; c'est-à-dire que le diamètre AB partage le cercle en deux parties égales, c. q. f. d.

Théorème III

92. — Le diamètre AB, perpendiculaire sur une corde CD, divise en deux parties égales cette corde et les deux arcs CAD, CBD qu'elle sous-tend (*fig.* 65).

D'abord le point E est le milieu de CD à cause de l'égalité des obliques OC et OD. Si maintenant on fait tourner le demi-plan AMB autour de AB de façon qu'il vienne s'appliquer sur le demi-plan ANB, les deux arcs AMB, ANB viendront en coïncidence et aussi les points C et D. Donc les arcs AC et AD se superposent et il en sera de même des arcs BC et BD. Les arcs AC et AD sont donc égaux entre eux, c'est-à-dire que A est le milieu de l'arc CAD. De même B est le milieu de l'arc CBD, c. q. f. d.

Remarque. — Toute droite qui vérifiera deux des cinq conditions suivantes :

1° Passer par le centre O ;

2° Être perpendiculaire sur une corde CD ;

3° Passer par le milieu de la corde CD ;

4° Passer par le milieu de l'arc CAD ;

5° Passer par le milieu de l'arc CBD ;

vérifiera aussi les trois autres, d'après le théorème précédent, puisque par deux points passe une seule droite et que, par un point, on peut mener une seule perpendiculaire à une droite.

93. Corollaire. — *Le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes parallèles à une direction donnée est le diamètre perpendiculaire sur cette direction.*

Théorème IV

94. — Deux droites parallèles AB, CD interceptent sur une circonférence O des arcs égaux.

Trois cas peuvent se présenter :

1° AB et CD sont des sécantes (*fig.* 66), interceptant sur la circonférence les arcs EG, FH. Soient I, K les milieux des cordes EF, GH, et faisons tourner le demi-

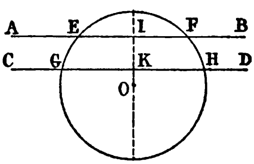


Fig. 66.

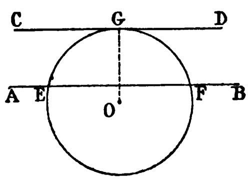


Fig. 67.

plan IKA autour du diamètre OKI jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le demi-plan IKB. D'après ce qui a été dit plus haut, l'arc EG vient se superposer à l'arc FH ; ces deux arcs sont donc égaux.

2° AB est sécante, CD est tangente en G (*fig.* 67). OG est perpendiculaire sur la tangente CD et, par suite, sur sa parallèle AB. Donc, G est le milieu de l'arc EGF (92), de sorte que les arcs EG, FG sont égaux.

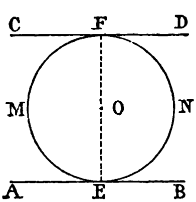


Fig. 68.

3° AB et CD sont tangentes en E et F (*fig.* 68). La droite EF est un diamètre puisque OE et OF sont perpendiculaires sur les droites parallèles AB, CD. Donc les arcs EMF, ENF sont égaux tous deux à la demi-circonférence et, par suite, égaux entre eux.

Le théorème est donc démontré dans tous les cas possibles.

95. — Une corde AB d'une circonférence O sous-tend deux arcs AMB, ANB (*fig.* 69). Menons le diamètre AOA'; les deux arcs AMA', ANA' sont égaux (**91**); donc l'arc AMB est plus petit que la demi-circonférence. Toutes les fois que nous parlerons de l'arc sous-tendu par une corde, il faudra entendre, à moins que le contraire ne soit spécifié, qu'il s'agit du plus petit des deux arcs sous-tendus par cette corde.

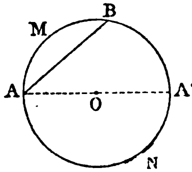


Fig. 69.

Théorème V

96. — Soient dans deux circonférences égales O et O' ou dans une même circonférence, deux arcs AMB, CND sous-tendus par les cordes AB, CD; la corde AB est inférieure, égale ou supérieure à la corde CD suivant que l'arc AMB est inférieur, égal ou supérieur à l'arc CND.

Supposons d'abord les arcs AMB, CND égaux (*fig.* 70); ils peuvent être amenés en coïncidence; alors les cordes CD, AB qui les sous-tendent seront elles-mêmes en coïncidence; par suite elles sont égales.

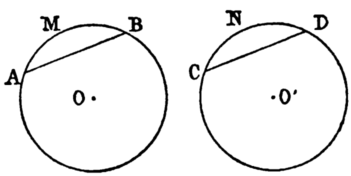


Fig. 70.

Supposons maintenant les deux arcs donnés inégaux et soit AMB le plus petit (*fig.* 71). Prenons, à partir du point A et dans le sens AMB sur la circonférence O, un arc AME égal à l'arc CND; la corde AE sera égale à la corde CD, d'après ce qui précède, de sorte qu'il suffit de démon-

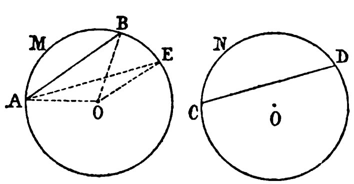


Fig. 71.

trer que AB est inférieur à AE. Remarquons que l'angle AOE est supérieur à l'angle AOB puisque OB tombe entre OA et OE, et considérons les deux triangles AOB, AOE : ils ont deux côtés égaux chacun à chacun (OA commun, OB = OE comme rayons), et l'angle AOB du premier est inférieur à l'angle AOE du second : donc (37) le côté AB opposé à l'angle AOB dans le premier est inférieur au côté AE opposé à l'angle AOE dans le second, c. q. f. d.

97. — Réciproquement, *si on considère dans deux circonférences égales* O *et* O′ *ou dans une même circonférence, deux cordes* AB, CD, *l'arc* AMB *sous-tendu par la corde* AB *est inférieur, égal ou supérieur à l'arc* CND *sous-tendu par la corde* CD, *suivant que la corde* AB *est inférieure, égale ou supérieure à la corde* CD.

Ces propositions sont vraies en vertu du principe énoncé au n° 39.

Remarque. — On verra aisément comment le théorème précédent et sa réciproque doivent être modifiés, si l'on veut considérer les arcs supérieurs à une demi-circonférence sous-tendus par les cordes AB, CD.

Théorème VI

98. — Soient dans deux circonférences égales O et O′ ou dans une même circonférence, deux cordes AB, CD ; la distance OH de la corde AB au centre O est inférieure, égale ou supérieure à la distance O′K de la corde CD au centre O′, suivant que la corde AB est supérieure, égale ou inférieure à la corde CD.

Supposons d'abord les cordes AB, CD égales (*fig.* 72). On peut faire coïncider les deux circonférences O et O′ de façon que CD coïncide avec AB ; alors O′K coïncidera avec OH, puisque d'un point on peut mener une seule perpendiculaire à une droite. Donc les distances O′K et OH sont égales.

Supposons maintenant les deux cordes données inégales, et soit AB la plus petite (*fig.* 73). Prenons, à partir

du point A, dans le sens AMB, sur la circonférence O, un arc AME égal à l'arc CND; la corde AE sera égale à la corde CD, et, si OI est la distance du point O à AE, OI sera égale à O'K d'après ce qui précède, de sorte qu'il suffit de démontrer que OI est inférieure à OH. Or OH rencontre AE en un point G compris entre O et H, puisque le point

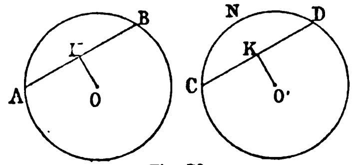


Fig. 72.

E est certainement entre le point B et le point A' diamétralement opposé au point A. On a donc OG < OH; en outre OI étant perpendiculaire sur AE, on a OI < OG (45); donc on a, à plus forte raison, OI < OH, c. q. f. d.

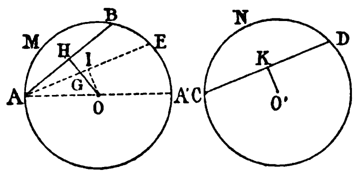


Fig. 73.

99. — Réciproquement, *si on considère, dans deux circonférences égales* O *et* O' *ou dans une même circonférence, deux cordes* AB, CD, *la corde* AB *est supérieure, égale ou inférieure à la corde* CD *suivant que la distance* OH *de* AB *au centre* O *est inférieure, égale ou supérieure à la distance* O'K *de* CD *au centre* O'.

La vérité de ces propositions résulte immédiatement du principe énoncé au n° 39.

§ 3. — Positions relatives de deux circonférences.

Théorème VII

100. — Par trois points A, B, C, non situés en ligne droite, on peut faire passer une circonférence et une seule (*fig.* 74).

Le centre d'une circonférence passant par les trois points A, B, C est équidistant de ces trois points. En

particulier, il est équidistant des deux points A et B et, par suite (50), se trouve sur la perpendiculaire DD′ élevée sur AB en son milieu D ; pour la même raison, il est sur la perpendiculaire EE′ élevée sur AC en son milieu E.

Si les trois points A, B, C sont en ligne droite, ces deux perpendiculaires sont parallèles et, par suite, il n'existe pas de circonférence passant par ces trois points, ce que nous savions déjà, puisqu'une droite ne peut pas rencontrer une circonférence en trois points.

Si les trois points A, B, C ne sont pas en ligne droite, les deux droites DD′ et EE′ se rencontrent nécessairement en un point O, car si elles étaient parallèles, les droites AB, AC, qui leur sont respectivement perpendiculaires, seraient parallèles et par suite sur le prolongement l'une de l'autre. Le point O étant équidistant des points A et B, d'une part, et des points A et C, d'autre part, est le centre d'une circonférence passant par les trois points A, B, C.

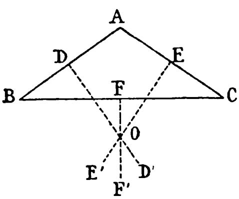


Fig. 74.

La façon dont nous avons obtenu le point O nous montre en même temps qu'il n'existe pas d'autre circonférence passant par les trois points A, B, C.

Remarque. — Le point O appartient aussi à la perpendiculaire FF′ élevée sur BC en son milieu F, puisqu'il est équidistant des points B et C.

101. — Il résulte du théorème précédent que deux circonférences ne peuvent avoir trois points communs sans coïncider ; *donc deux circonférences distinctes ont au plus deux points communs.*

On dit de deux circonférences qu'elles sont *sécantes* si elles ont deux points communs ; elles sont *tangentes* si elles ont un seul point commun, qui est alors appelé leur point de contact.

Théorème VIII

102. — Si deux circonférences distinctes O et O′ ont un point commun A en dehors de la ligne des centres OO′, elles ont un second point commun B, tel que OO′ est perpendiculaire sur AB en son milieu.

Si deux circonférences O et O′ ont un point commun A sur la ligne des centres OO′, elles sont tangentes en ce point.

Considérons d'abord le premier cas (*fig.* 75). Menons du point A une perpendiculaire AC sur OO′ et prolongeons-la d'une longueur CB égale à elle-même. Le point B appartient à la circonférence O, car OB = OA comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire (45). Pour une raison pareille, le point B appartient aussi à la circonférence O′ et, par suite, est commun aux deux circonférences, c. q. f. d.

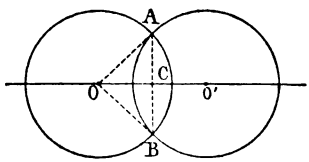


Fig. 75.

Envisageons maintenant le deuxième cas (*fig.* 76). Les deux circonférences ne peuvent avoir aucun autre point commun que A, car si elles avaient un point commun B en dehors de la ligne des centres, elles auraient en commun un troisième point C construit comme nous venons de le voir plus haut; elles auraient donc trois points communs, ce qui est impossible; si, en second lieu, elles avaient un second point commun B sur la ligne des centres, elles auraient un diamètre commun et, par suite, coïncideraient, ce que nous ne supposons pas. N'ayant en commun que le seul point A, les deux circonférences sont tangentes, c. q. f. d.

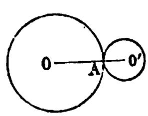


Fig. 76.

103. — Réciproquement, *si deux circonférences* O *et* O′

sont sécantes, la ligne des centres OO′ *est perpendiculaire sur la corde commune en son milieu* C.

Si deux circonférences O *et* O′ *sont tangentes, leur point de contact* A *est sur la ligne des centres.*

La vérité de ces propositions résulte du principe général du n° 39; la première se démontre d'ailleurs directement sans difficulté.

Remarque. — Si deux circonférences sont tangentes en A, elles ont même tangente en leur point de contact : cette tangente est, en effet, la perpendiculaire en A à la ligne des centres.

Théorème IX

104. — Deux circonférences distinctes O, O′ peuvent présenter cinq positions relatives distinctes :

1° Elles peuvent être extérieures l'une à l'autre : alors la ligne des centres OO′ est supérieure à la somme des rayons;

2° Elles peuvent être tangentes extérieurement : alors la ligne des centres OO′ est égale à la somme des rayons;

3° Elles peuvent être sécantes : alors la ligne des centres OO′ est inférieure à la somme des rayons et supérieure à leur différence ;

4° Elles peuvent être tangentes intérieurement : alors la ligne des centres OO′ est égale à la différence des rayons ;

5° L'une d'elles peut être intérieure à l'autre : alors la ligne des centres OO′ est inférieure à la différence des rayons.

1° OO′ coupant les circonférences respectivement en A et A′ (*fig.* 77), on a :

$$OO' = OA + AA' + O'A'$$

et par suite, $OO' > OA + O'A'$, c. q. f. d.

2° A étant le point de contact situé sur OO′ (*fig.* 78), on a :

$$OO' = OA + O'A, \text{ c. q. f. d.}$$

3° A étant un point commun aux deux circonférences (*fig.* 79), on a dans le triangle OAO′ (**34**) :

$$OO' < OA + O'A \text{ et } OO' > OA - O'A, \text{ c. q. f. d.}$$

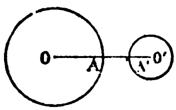


Fig. 77.

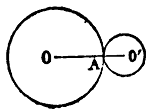


Fig. 78.

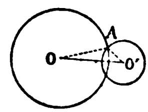


Fig. 79.

4° A étant le point de contact situé sur OO′ (*fig.* 80), on a :

$$OO' = OA - O'A, \text{ c. q. f. d.}$$

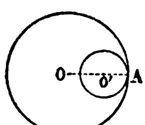


Fig. 80.

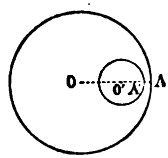


Fig. 81.

5° OO′ coupant les circonférences respectivement en A et A′ (*fig.* 81), on a :

$$OO' = OA - O'A' - AA'$$

et par suite :

$$OO' < OA - O'A', \text{ c. q. f. d.}$$

105. — Réciproquement, *si l'on considère deux circonférences* O et O′ :

1° *Elles sont extérieures l'une à l'autre si la ligne des centres* OO′ *est supérieure à la somme des rayons ;*

2° *Elles sont tangentes extérieurement si la ligne des centres* OO′ *est égale à la somme des rayons ;*

3° *Elles sont sécantes si la ligne des centres* OO′ *est inférieure à la somme des rayons et supérieure à leur différence ;*

4° *Elles sont tangentes intérieurement si la ligne des centres* OO′ *est égale à la différence des rayons ;*

5° *L'une d'elles est intérieure à l'autre, si la ligne des centres OO' est inférieure à la différence des rayons.*

La vérité de ces propositions résulte du principe général du n° 39.

EXERCICES

1. — Démontrer directement que, si une droite rencontre une circonférence O en un point A et n'est pas perpendiculaire au rayon OA, elle n'est pas tangente à la circonférence.

2. — On joint un point A à un point M d'une circonférence : comment varie la longueur AM lorsque M décrit la circonférence ? (La distance du point A à la circonférence est AB si B est le point de la circonférence qui correspond à la plus petite valeur de AM.)

3. — Par un point A on mène une droite qui rencontre une circonférence en B et C ; comment varie la longueur BC lorsque la droite tourne autour du point A ?

4. — Deux cordes égales AB, CD d'une circonférence O se coupent en un point S ; démontrer que ces deux cordes sont symétriques par rapport au diamètre SO (voy. exercice 7, § 3, livre I). En déduire les conséquences.

5. — Deux circonférences se coupent en un point A ; par A on mène une droite qui coupe les circonférences en B et C ; comment varie la longueur BC lorsque la droite tourne autour du point A ? (Par le centre O de l'une des circonférences on mène une parallèle OD à BC, et par le centre O' de l'autre, une perpendiculaire O'D à BC ; OD est la moitié de BC, et il suffit d'étudier OD.)

6. — On joint un point A d'une circonférence à un point B d'une autre circonférence ; quelle est la plus petite ou la plus grande valeur de AB ?

7. — Deux circonférences O et O' se coupent en un point A ; les rayons OA et O'A prolongés coupent ces circonférences en B et C ; démontrer que BC passe par le second point d'intersection A' des deux circonférences et est perpendiculaire sur AA'.

8. — Les segments interceptés sur une droite entre deux circonférences concentriques sont égaux.

9. — Quel est le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une circonférence donnée ?

10. — Quel est le lieu géométrique des milieux des cordes d'une circonférence qui ont une longueur donnée ?

11. — Un segment de longueur donnée se meut en restant parallèle à lui-même, de façon qu'une de ses extrémités décrive une circonférence. Quel est le lieu géométrique de l'autre extrémité ?

12. — Quel est le lieu géométrique du milieu d'un segment de longueur donnée dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires ?

13. — Quel est le lieu géométrique des centres des cercles de rayon donné tangents à une droite donnée ?

14. — Quel est le lieu géométrique des centres des cercles de rayon donné tangents à un cercle donné ?

15. — Quel est le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener à une circonférence une tangente de longueur donnée ?

16. — Quel est le lieu géométrique des points d'où l'on voit une circonférence sous un angle donné ? (L'angle sous lequel on voit une circonférence d'un point donné est l'angle des tangentes menées de ce point à la circonférence.)

17. — Quelle est la situation respective de deux circonférences dont les rayons sont 15 mètres et 6 mètres, et dont la distance des centres est 10 mètres ?

§ 4. — La mesure des angles.

106. — Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de rappeler les principes fondamentaux de la théorie de la mesure des grandeurs.

Considérons des grandeurs de même espèce pour lesquelles l'égalité et l'addition aient été définies : les longueurs, les angles, les arcs de circonférences égales seront dans ce cas.

Pour *mesurer* une grandeur A de l'espèce considérée, il faut, tout d'abord, choisir une grandeur de même espèce U qui servira de terme de comparaison et qui reçoit le nom d'*unité*. Trois cas peuvent alors se présenter :

1° La grandeur A est la somme d'un certain nombre entier de grandeurs égales à l'unité U, ou, en d'autres termes, A contient l'unité un certain nombre entier de fois, 5 par exemple ; on dit alors que la grandeur A a pour mesure ce nombre entier 5 lorsque l'on prend pour unité la grandeur U et, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le choix de l'unité, on dit simplement que A est mesurée par ce nombre entier 5.

2° L'unité U n'est pas contenue un nombre entier de fois dans A, mais il existe une grandeur V de même espèce

contenue un nombre entier de fois dans U, c'est-à-dire une *partie aliquote* de U, qui est contenue aussi un nombre entier de fois dans A.

Supposons, par exemple, qu'on ait d'abord reconnu que A contient U plus de cinq fois, mais moins de six fois; puis qu'on ait trouvé une grandeur V contenue sept fois dans U et trente-six fois dans A. On voit que A contient trente-six fois la septième partie de l'unité U, et l'on dit alors que le nombre fractionnaire *trente-six septièmes*, ou $\frac{36}{7}$, est la mesure de la grandeur A lorsque l'on prend U pour unité.

3° Il n'existe aucune grandeur de même espèce qui soit à la fois partie aliquote de A et de U.

La grandeur A est dite alors *incommensurable* avec l'unité U, et par opposition, dans les deux cas précédents, on dit que A est *commensurable* avec U.

Le nombre qui mesure A est un nombre *incommensurable* dont on peut obtenir des valeurs approchées avec telle précision qu'on voudra. Si, par exemple, la valeur approchée de ce nombre doit être obtenue à moins de un millième près, on cherchera le plus grand nombre entier de fois que A contient la millième partie de U; soit 3047 ce nombre. A est donc supérieure à 3047 fois la millième partie de U, mais inférieure à 3048 fois la millième partie de U. Le nombre incommensurable qui mesure A a par suite pour valeur approchée à moins de un millième près par défaut, le nombre décimal 3,047, et à moins de un millième près par excès, le nombre décimal 3,048.

Comme en arithmétique, nous ne considérons les nombres incommensurables qui mesurent les grandeurs incommensurables que par leurs valeurs approchées, et par suite, nous n'aurons jamais à raisonner que sur des grandeurs commensurables.

107. — On appelle *rapport* d'une grandeur A à une grandeur B de même espèce, le nombre qui mesure A lorsque l'on prend B pour unité.

Théorème.

Le rapport de deux grandeurs A et B est le quotient des nombres *a* et *b* qui mesurent ces deux grandeurs rapportées à une même unité arbitraire U.

Supposons, en effet, que A et B soient mesurées respectivement par les nombres fractionnaires $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{5}$ lorsque l'on choisit une certaine unité U. On peut dire encore que A et B sont mesurées par les nombres fractionnaires égaux aux précédents, mais de même dénominateur, $\frac{2\times 5}{3\times 5}$, $\frac{3\times 7}{3\times 5}$ ou $\frac{10}{15}$ et $\frac{21}{15}$.

Donc A contient dix fois et B contient vingt et une fois la quinzième partie de U; d'où il résulte que A contient dix fois la vingt et unième partie de B. Le nombre qui mesure A lorsque l'on prend B pour unité, est donc le nombre fractionnaire $\frac{10}{21}$ ou $\frac{2\times 5}{3\times 7}$: or ce nombre est précisément, d'après la règle de la division des nombres fractionnaires, le quotient des nombres $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{5}$ qui mesurent A et B lorsque l'unité est U, c. q. f. d.

Le rapport de deux nombres étant leur quotient, on voit que l'on peut dire encore que le rapport des deux grandeurs A et B est égal au rapport *arithmétique* des nombres *a* et *b* qui mesurent ces grandeurs lorsque l'on prend une unité arbitraire U.

On représente le rapport de la grandeur A à la grandeur B par la notation $\frac{A}{B}$; on peut donc écrire :

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}.$$

Il faut bien remarquer que A et B désignent des grandeurs, et que le symbole $\frac{A}{B}$ est un nombre.

108. — Supposons que l'on mesure une grandeur A successivement avec deux unités différentes U et U'; soient a et a' les nombres ainsi obtenus.

Il est clair que si U' est inférieure à U, a' sera supérieur à a, et inversement.

D'une façon plus précise, il est facile d'obtenir une relation entre les nombres a, a' et le rapport q de la grandeur U à la grandeur U'.

Le rapport de A à U, c'est-à-dire a, est en effet égal, d'après le théorème précédent, au rapport des nombres a' et q qui mesurent A et U lorsque l'on prend pour unité U'. On a donc :

$$a = \frac{a'}{q}, \quad \text{ou} \quad a' = aq.$$

C'est ainsi que si l'on considère une longueur de cinq mètres, elle est mesurée par le nombre 5, si on prend le mètre pour unité; par le nombre 500, si on prend le centimètre pour unité; par le nombre 0,005, si on prend le kilomètre pour unité.

109. — Considérons deux séries de grandeurs variables qui se correspondent de telle façon que le rapport de deux grandeurs quelconques de la première série soit égal au rapport des deux grandeurs correspondantes de la deuxième série. On dit alors que les grandeurs des deux séries considérées sont *proportionnelles*.

Si A et A' sont deux grandeurs de la première série, B et B' les deux grandeurs correspondantes de la deuxième série, les deux rapports $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ sont égaux, c'est-à-dire que l'on a la *proportion*

$$(1) \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

dont les termes portent les noms que l'on apprend en arithmétique.

Si a et a' sont les nombres qui mesurent A et A' rapportées à une unité arbitraire U, et si b et b' sont les

nombres qui mesurent B et B′ rapportées à une unité arbitraire V, on aura entre les quatre nombres a, a', b, b' la *proportion arithmétique :*

$$(2)\ \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},$$

puisque les rapports égaux $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ sont respectivement égaux aux rapports arithmétiques $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$.

De cette relation entre les quatre nombres a, a', b, b', on pourra en conclure un grand nombre d'autres de formes différentes, ainsi qu'on l'apprend en arithmétique.

110. — Si les grandeurs A, A′, B, B′ sont toutes les quatre de même espèce et vérifient la relation (1), on dit que B′ est une *quatrième proportionnelle* à A, A′, B.

Si, en outre, les grandeurs A′ et B sont identiques, on dit que B est *moyenne proportionnelle* entre A et B′; on dit aussi dans ce même cas que B′ est une troisième proportionnelle à A et B.

Si a, a', b, b' sont les quatre nombres qui mesurent A, A′, B, B′ rapportées à une même unité arbitraire U, on a toujours :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},$$

d'où l'on tire en particulier $ab'=a'b$.

Si les grandeurs A′ et B deviennent identiques, on a $a'=b$, et cette relation devient :

$$ab'=b^2,\ \text{ou}\ b=\sqrt{ab'}.$$

111. — On commettrait une grave erreur en attribuant aux proportions entre des grandeurs telles que (1), les propriétés des proportions arithmétiques telles que (2).

Il est clair, par exemple, que si les grandeurs A et A′ ne sont pas de même espèce que les grandeurs B et B′ on ne peut pas changer l'ordre des moyens dans la proportion (1) : car $\frac{A}{B}$ n'est alors susceptible d'aucun sens.

Dans tous les cas, il serait de même absurde d'écrire que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ; car le produit de deux grandeurs est une expression qui n'a pas de sens, que ces grandeurs soient ou non de même espèce.

Les seules propriétés des proportions arithmétiques que l'on puisse transporter aux proportions telles que (1), sont celles qui conduisent à de nouvelles égalités ayant un sens précis. C'est ainsi que l'on pourra toujours conclure de la proportion (1) la nouvelle proportion :

$$(3)\ \frac{A+A'}{A'}=\frac{B+B'}{B'}.$$

En effet, de la proportion (2), on peut conclure, comme l'on sait, la nouvelle proportion :

$$(4)\ \frac{a+a'}{a'}=\frac{b+b'}{b'};$$

or $a+a'$ et a' sont les nombres qui mesurent les grandeurs $A+A'$ et A' quand on les rapporte à l'unité U ; de sorte que $\frac{a+a'}{a'}$ est le rapport des grandeurs $A+A'$ et A'. De même, $\frac{b+b'}{b'}$ est le rapport des grandeurs $B+B'$ et B'. Ces deux rapports étant égaux en vertu de l'égalité (4), on peut écrire l'égalité (3).

De même si les grandeurs A, A′, B, B′ sont toutes les quatre de même espèce, on pourra dans la proportion (1) intervertir l'ordre des moyens ou celui des extrêmes. On pourra écrire par exemple :

$$(5)\ \frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}.$$

Car la proportion (2) fournit la nouvelle égalité :

$$(6)\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},$$

et l'on voit comme plus haut que, si l'on a mesuré les

quatre grandeurs avec la même unité, $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont respectivement égaux aux rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$, de sorte que l'égalité (6) entraîne l'égalité (5).

Théorème

112. — Si les grandeurs de deux séries sont proportionnelles, et si l'on prend pour unité des grandeurs de la deuxième série la grandeur de cette série qui correspond à l'unité des grandeurs de la première série, deux grandeurs correspondantes quelconques des deux séries sont mesurées par le même nombre.

Soient A et B deux grandeurs correspondantes des deux séries, U et V les unités avec lesquelles on mesure les grandeurs des deux séries ; puisque U et V sont des grandeurs correspondantes, on a la proportion

$$\frac{A}{U}=\frac{B}{V},$$

d'après la définition des grandeurs proportionnelles.

Or $\frac{A}{U}$ est le nombre qui mesure A par définition ; $\frac{B}{V}$ est de même le nombre qui mesure B. Ces deux nombres sont donc égaux, c. q. f. d.

113. — Nous allons maintenant nous occuper de la mesure des angles. Dans une circonférence O, on appelle *angle au centre* un angle AOB qui a son sommet au centre O ; on appelle *angle inscrit* un angle BAC formé par deux cordes AB, AC ayant une extrémité commune (*fig.* 82).

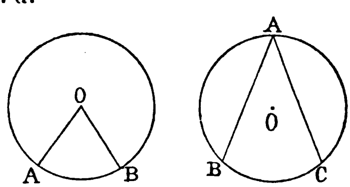


Fig. 82.

Théorème X

114. — Dans deux circonférences égales O et O′ ou dans une même circonférence :

1° Deux angles au centre égaux AOB, A′O′B′ interceptent, sur les circonférences O et O′, deux arcs AMB, A′M′B′ égaux ;

2° Réciproquement, si deux arcs plus petits que la demi-circonférence AMB, A′M′B′ sont égaux, les angles au centre correspondants AOB, A′O′B′ sont égaux (*fig.* 83).

1° Faisons coïncider les deux angles AOB, A′O′B′ ; les circonférences O et O′ coïncideront également, puisque leurs centres coïncideront. Par suite, A′ venant en A, B′ viendra en B et les arcs A′M′B′, AMB coïncideront ; ils sont donc égaux, c. q. f. d.

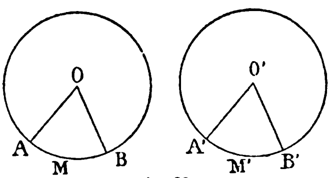


Fig. 83.

2° Faisons coïncider les deux circonférences O et O′, de façon que les arcs A′M′B′ et AMB coïncident ; alors les rayons O′A′, O′B′ coïncideront respectivement avec les rayons OA et OB. Les deux angles A′O′B′, AOB seront alors en coïncidence et par suite sont égaux, c. q. f. d.

Remarque. — Il est évident, d'après ce théorème, que l'arc AMB sera supérieur ou inférieur à l'arc A′M′B′, suivant que l'angle AOB sera supérieur ou inférieur à l'angle A′O′B′ ; et réciproquement.

Théorème XI

115. — Dans deux circonférences égales O et O ou dans une même circonférence, le rapport des

deux angles au centre AOB, A'O'B' est égal au rapport des arcs AMB, A'M'B' compris entre leurs côtés (*fig.* 84).

Supposons que le rapport des angles AOB, A'O'B' soit le nombre fractionnaire $\frac{3}{5}$. Il en résulte que l'angle AOB contient trois fois le cinquième de l'angle A'O'B', ou qu'il existe un même angle contenu trois fois dans AOB et cinq fois dans A'O'B'. Divisons donc l'angle AOB en trois angles égaux et l'angle A'O'B' en cinq angles égaux entre eux et aux précédents, d'après ce qui précède.

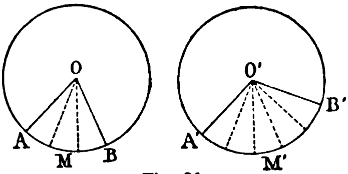


Fig. 84.

Ces angles partiels, tous égaux, intercepteront sur les circonférences auxquelles ils appartiennent, des arcs égaux, d'après le théorème précédent. Or, l'arc AMB contient trois de ces arcs et l'arc A'M'B' en contient cinq. L'arc AMB contient donc trois fois le cinquième de l'arc A'M'B', c'est-à-dire que le rapport des arcs AMB, A'M'B' est le nombre $\frac{3}{5}$ égal au rapport des angles AOB, A'O'B', c. q. f. d.

116. — Il résulte de ce théorème que *dans des circonférences égales les angles au centre sont proportionnels aux arcs compris entre leurs côtés*. Par suite, on peut énoncer le théorème suivant (**112**) :

Théorème XII

Un angle au centre a même mesure que l'arc compris entre ses côtés, à condition que l'on prenne pour unité d'angle, l'angle au centre qui comprend entre ses côtés l'unité d'arc.

Lorsqu'on a besoin de rappeler ce théorème, d'un usage très fréquent, on a l'habitude de sous-entendre la condi-

tion relative aux unités choisies et l'on dit simplement qu'un angle au centre a même mesure que l'arc compris entre ses côtés.

Ajoutons que l'usage a consacré une locution vicieuse qui n'abrège en rien le langage : on dit ordinairement qu'*un angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés*.

117. — Menons dans une circonférence O deux diamètres perpendiculaires AA', BB' (*fig.* 85). Les quatre angles au centre formés autour du point O étant égaux comme droits, les quatre arcs déterminés sur la circonférence par ces deux diamètres, sont égaux (114). Chacun d'eux est donc le quart de la circonférence et reçoit, pour cette raison, le nom de *quadrant*.

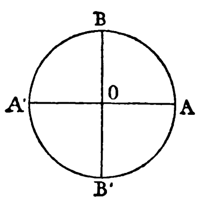


Fig. 85.

Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle, l'unité d'arc correspondante sera le quadrant.

118. — L'unité généralement adoptée pour les arcs et les angles est le *degré*. On divise une circonférence en 360 parties égales qu'on appelle *degrés;* le degré est divisé lui-même en 60 parties égales qu'on appelle *minutes;* la minute est divisée en 60 parties égales qu'on appelle *secondes*. Les fractions de seconde s'expriment en fractions décimales.

La circonférence entière contient donc 360 degrés, 21600 minutes et 1296000 secondes; la demi-circonférence contient 180 degrés, 10800 minutes et 648000 secondes; le quadrant contient 90 degrés, 5400 minutes, 324000 secondes. Le degré contient 3600 secondes.

Un arc est évalué en degrés, minutes, secondes et fractions de seconde. Ainsi on dira un arc de 57 degrés, 17 minutes, 44 secondes, 81 centièmes (de seconde), que l'on écrit $57° 17' 44'',81$.

On appelle angle d'un degré, l'angle qui intercepte sur une circonférence quelconque ayant son sommet pour centre, un arc de un degré; l'angle d'une minute est la

soixantième partie de l'angle d'un degré; l'angle d'une seconde est la soixantième partie de l'angle d'une minute. D'après cela et les théorèmes précédemment démontrés, la valeur d'un angle exprimée en degrés, minutes et secondes sera la même que celle de l'arc intercepté par les côtés de cet angle sur une circonférence quelconque ayant son sommet pour centre.

Ainsi, en particulier, l'angle droit vaut 90°. Cette façon de compter les angles ne diffère donc pas de celle déjà indiquée au n° 21.

Il est essentiel de remarquer que deux arcs exprimés par les mêmes nombres de degrés, minutes et secondes, ne sont égaux qu'autant qu'ils appartiennent à des circonférences égales ; mais, dans tous les cas, les angles au centre qui correspondent à deux tels arcs sont égaux; ceci résulte immédiatement de ce qui précède.

119. — Deux exemples vont nous fournir des applications des théorèmes généraux que nous avons démontrés sur la mesure des grandeurs :

1° Quel est le rapport de l'angle de 57° 17′ 44″,81 à l'angle droit ?

Cherchons d'abord la mesure des deux angles donnés lorsque l'on prend la seconde pour unité :

57 degrés valent

$$57 \times 60 = 3420 \text{ minutes};$$

$3420 + 17 = 3437$ minutes valent :

$$3437 \times 60 = 206\,220 \text{ secondes};$$

Donc le premier angle donné vaut :

$$206220 + 44,81 = 206\,264,81 \text{ secondes}.$$

D'ailleurs, l'angle droit vaut 324 000 secondes.

Le rapport cherché est donc :

$$\frac{206\,264,81}{324\,000} = 0,636620 \text{ par excès}.$$

2° On prend pour unité l'arc de 57° 17′ 44″,81 ; quelle sera la mesure de la demi-circonférence ?

Si l'on prend pour unité la seconde, la demi-circonférence a pour mesure 648000, et l'arc de $57^\circ\ 17''\ 44',81$ a pour mesure 206264,81. Le nombre cherché est donc :

$$\frac{648000}{206\,264{,}81} = 3{,}14159\ldots$$

Remarque. — La division de la circonférence en degrés, minutes et secondes, ou division *sexagésimale*, est très ancienne et adoptée universellement.

Quelques auteurs ont essayé de la remplacer par la division *centésimale*, qui rendrait les calculs plus faciles et serait beaucoup mieux en harmonie avec notre système métrique. Dans ce mode de division, le quadrant est partagé en 100 parties égales qu'on appelle *grades;* le grade est partagé lui-même en 100 *minutes centésimales;* la minute centésimale est partagée en 100 *secondes centésimales*. On dit alors, par exemple, un arc ou un angle de 63 grades, 66 minutes, 20 secondes, que l'on écrit $63^{G}\,66^{\backprime}\,20^{\backprime\backprime}$, ou simplement $63^{G},6620$.

Exemple. — Exprimer en grades l'arc de $57^\circ\,17'\,44'',81$.

La mesure de cet arc, si on prend le quadrant pour unité, est 0,636620; le quadrant valant 100^{G}, si on prend le grade pour unité, cet arc aura pour mesure 63,6620; il vaut donc $63^{G}\,66^{\backprime}\,20^{\backprime\backprime}$.

Théorème XIII

120. — Un angle inscrit BAC dans une circonférence O a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés.

Il est bien entendu que, comme au n° 116, si l'on voulait parler correctement, il faudrait dire : Un angle inscrit a même mesure que la moitié de l'arc compris entre ses côtés, à condition que l'on prenne pour unité d'angle l'angle au centre qui comprend entre ses côtés l'unité d'arc. Il en sera de même pour les énoncés analogues qui vont suivre.

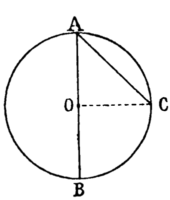


Fig. 86.

Dans la démonstration du théorème, nous distinguerons trois cas :

1° L'un des côtés de l'angle AB passe par le centre O de la circonférence (*fig.* 86).

Menons OC; l'angle BOC extérieur au triangle OAC est

égal à la somme des deux angles non adjacents OAC, OCA de ce triangle (**69**). Mais ces deux angles sont égaux, puisque le triangle OAC est isocèle : OA=OC comme rayons. Donc l'angle BOC est double de l'angle considéré BAC. L'angle au centre BOC a d'ailleurs pour mesure l'arc BC; sa moitié, l'angle BAC, a donc pour mesure la moitié de l'arc BC, c. q. f. d.

2° Le centre O est dans l'intérieur de l'angle BAC (*fig.* 87).

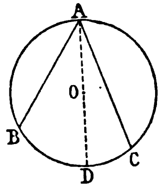


Fig. 87.

Menons le diamètre AOD; l'angle BAC est la somme des deux angles BAD, CAD qui, d'après ce que nous venons de dire, ont respectivement pour mesures les moitiés des arcs BD et CD. L'angle BAC a donc pour mesure la somme des moitiés des arcs BD et CD, c'est-à-dire la moitié de la somme des arcs BD et CD ou, enfin, la moitié de l'arc BC, c. q. f. d.

3° Le centre O est en dehors de l'angle BAC (*fig.* 88).

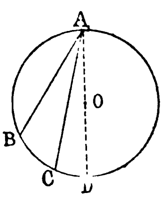


Fig. 88.

Menons le diamètre AOD; l'angle BAC est la différence des deux angles BAD, CAD; répétant alors un raisonnement pareil à celui qui précède, on voit immédiatement que l'angle BAC a encore pour mesure la moitié de l'arc BC, c. q. f. d.

Théorème XIV

121. — Un angle BAC, formé par une tangente AB et une corde AC d'une circonférence O, et ayant pour sommet le point de contact A de la tangente, a pour mesure la moitié de l'arc AMC compris entre ses côtés.

Nous distinguerons trois cas :

1° AC est un diamètre (*fig.* 89).

Le théorème est alors évident puisque l'angle BAC est droit et que l'arc AMC est une demi-circonférence.

2° Le centre O est dans l'intérieur de l'angle BAC (*fig.* 90).

Menons le diamètre AOD ; l'angle BAC est la somme des deux angles BAD, CAD ; chacun de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés et, par suite, en répétant un raisonnement fait plus haut, on en

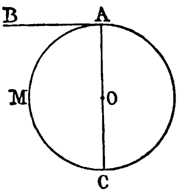


Fig. 89.

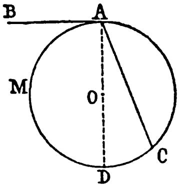


Fig. 90.

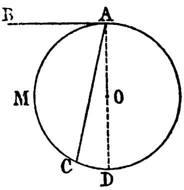


Fig. 91.

conclut qu'il en est de même de l'angle BAC, c. q. f. d.

3° Le centre O est en dehors de l'angle BAC (*fig.* 91).

L'angle BAC est alors la différence des deux angles BAD, CAD dont chacun a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Il en est donc de même de l'angle BAC, c. q. f. d.

122. — On appelle *segment de cercle* la portion de cercle comprise entre un arc et sa corde. A une corde donnée AB correspondent deux segments AMB, ASB (*fig.* 92). Un angle est inscrit dans un segment lorsque son sommet est sur l'arc du segment et que ses côtés passent par les extrémités de la corde du segment : ainsi l'angle AMB est inscrit dans le segment AMB.

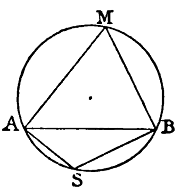


Fig. 92.

Tous les angles inscrits dans un même segment AMB *sont égaux;* car chacun d'eux a pour mesure la moitié de l'arc ASB.

Si deux angles AMB, ASB *sont inscrits dans les deux segments* AMB, ASB *qui ont même corde, ils sont supplémentaires*. La somme de leurs mesures est, en effet, la demi-somme des arcs ASB et AMB, c'est-à-dire la demi-

circonférence ou deux quadrants; leur somme est donc deux angles droits.

Un angle inscrit dans un segment est aigu, droit ou obtus suivant que ce segment est supérieur, égal ou inférieur à un demi-cercle; car l'arc dont la moitié mesure l'angle considéré, est alors inférieur, égal ou supérieur à la demi-circonférence.

Les réciproques de ces dernières propositions sont vraies (**39**).

Un segment de cercle est *capable d'un angle donné*, lorsque tous les angles inscrits dans ce segment sont égaux à cet angle. Ainsi, le demi-cercle est capable d'un angle droit.

Théorème XV

123. — Un angle BAC, formé par deux cordes BB′, CC′ qui se coupent à l'intérieur d'une circonférence O, a pour mesure la demi-somme des arcs BC, B′C′ compris entre ses côtés et les prolongements de ses côtés (*fig.* 93).

Menons la corde BC′; l'angle BAC, extérieur au triangle ABC′, est égal à la somme des deux angles non adjacents B et C′ de ce triangle. Or B est un angle inscrit qui a pour mesure la moitié de l'arc B′C′; C′ est un angle inscrit qui a pour mesure la moitié de l'arc BC. L'angle BAC a donc pour mesure la demi-somme des arcs BC et B′C′, c. q. f. d.

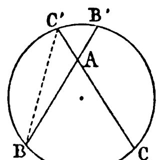


Fig. 93.

Théorème XVI

124. — Un angle BAC, formé par deux sécantes BB′, CC′ qui se coupent à l'extérieur d'une circonférence O, a pour mesure la demi-différence de l'arc concave BC et de l'arc convexe B′C′ compris entre ses côtés (*fig.* 94).

Menons la corde BC′; l'angle BC′C étant extérieur au

triangle ABC′, l'angle BAC de ce triangle est égal à la différence de l'angle BC′C et de l'angle B. Or, BC′C est un angle inscrit qui a pour mesure la moitié de l'arc BC; B est un angle inscrit qui a pour mesure la moitié de l'arc B′C′, l'angle BAC a donc pour mesure la demi-différence des arcs BC, B′C′, c. q. f. d.

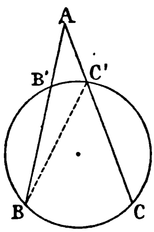


Fig. 94.

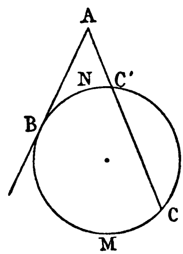


Fig. 95.

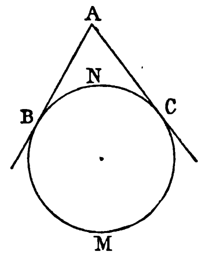


Fig. 96.

Remarque. — On démontrerait de la même façon un théorème tout à fait semblable, relatif à un angle BAC dont un côté serait tangent à la circonférence, l'autre étant une sécante (*fig.* 95), ou à un angle BAC dont les deux côtés seraient tangents à la circonférence (*fig.* 96).

Dans le premier cas, l'angle BAC a pour mesure la demi-différence des arcs BMC, BNC′; dans le second cas, l'angle BAC a pour mesure la demi-différence des arcs BMC, BNC.

Théorème XVII

125. — Le lieu géométrique des points M d'où l'on voit un segment de droite AB sous un angle donné, se compose de deux arcs de cercle égaux ayant chacun AB pour corde et placés symétriquement par rapport à AB (*fig.* 97).

Soit M un point du lieu tel que l'angle AMB soit égal à l'angle donné. Il est clair que si l'on décrit une circonférence passant par les trois points A, B, M, tout point N

de l'arc AMB appartiendra au lieu considéré, puisque les angles AMB, ANB seront égaux comme inscrits dans le même segment. Nous allons montrer maintenant que, dans le demi-plan ABM, tout point non situé sur l'arc AMB ne peut faire partie du lieu géométrique considéré. Soit d'abord P un point situé à l'intérieur du segment AMB; l'angle APB a pour mesure la moitié de l'arc ASB plus la moitié de l'arc compris entre ses côtés prolongés (**123**); il est donc plus grand que l'angle AMB qui a pour mesure la moitié de l'arc ASB.

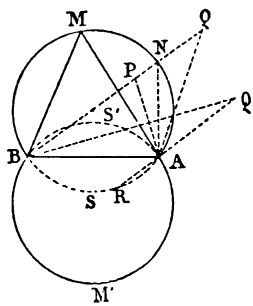


Fig. 97.

Soit maintenant Q ou Q′ un point extérieur au segment AMB; dans le premier cas, l'angle AQB a pour mesure la moitié de l'arc ASB, moins la moitié de l'arc convexe compris entre ses côtés (**124**), et, par suite, il est plus petit que l'angle AMB qui a pour mesure la moitié de l'arc ASB. Dans le second cas, l'angle AQ′B a pour mesure la moitié de l'arc BSR, inférieur à l'arc ASB, moins la moitié de l'arc convexe compris entre ses côtés et, par suite, il est plus petit que l'angle AMB qui a pour mesure la moitié de l'arc ASB.

Ainsi, dans le demi-plan AMB, le lieu géométrique des points considérés est l'arc AMB. Si on fait tourner ce demi-plan autour de AB, de façon à l'appliquer sur le demi-plan ASB, l'arc AMB viendra occuper une position AM′B, et il est clair que le lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit AB sous l'angle donné se compose des deux arcs AMB, AM′B, c. q. f. d.

Remarque. — D'après une proposition énoncée au n° 122, on voit que l'ensemble des deux arcs ASB, AS′B, qui ont même corde que les arcs AMB, AM′B, constitue le lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit AB sous un angle supplémentaire de l'angle donné.

Si l'angle donné est droit, les arcs ASB, AS'B viennent coïncider avec les arcs AM'B, AMB, et l'on peut dire que *le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment* AB *sous un angle droit est la circonférence décrite sur* AB *comme diamètre.*

Théorème XVIII

126. — Dans un quadrilatère convexe ABCD inscrit dans une circonférence, deux angles opposés sont supplémentaires, deux angles tels que ACB, ADB sont égaux (*fig.* 98).

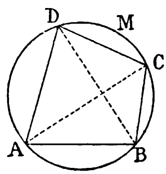


Fig. 98.

Les angles opposés BAD, BCD sont supplémentaires comme inscrits dans deux segments différents de même corde (**122**).

Les angles ACB, ADB sont égaux comme inscrits dans le même segment (**122**).

Théorème XIX

127. — Réciproquement, **si dans un quadrilatère convexe ABCD deux angles opposés sont supplémentaires, ou si deux angles tels que ACB, ADB sont égaux, on peut inscrire le quadrilatère dans une circonférence ou, en d'autres termes, le quadrilatère est inscriptible** (*fig.* 98).

Supposons les angles BAD, BCD supplémentaires, et faisons passer une circonférence par les trois points A, B, D. Le lieu géométrique des points d'où l'on voit BD sous un angle supplémentaire de l'angle BAD et qui ne sont pas situés du même côté que A de BD, est l'arc BMD de cette circonférence (**125**). Donc le point C est situé sur cet arc et le quadrilatère est inscrit dans une circonférence, c. q. f. d.

Supposons maintenant les deux angles ACB, ADB égaux. Faisons passer une circonférence par les trois

points A, B, C; le lieu géométrique des points d'où l'on voit AB sous un angle égal à ACB, et qui sont situés du même côté que C de AB, est l'arc ACB de cette circonférence (125); donc le point D est situé sur cet arc, et le quadrilatère est inscrit dans une circonférence, c. q. f. d.

Exercices

1. — La bissectrice d'un angle inscrit dans une circonférence passe par le milieu de l'arc compris entre les côtés de cet angle.

Comment modifier cet énoncé s'il s'agit de la bissectrice extérieure d'un angle inscrit ?

2. — Deux triangles sont égaux s'ils ont un côté égal, l'angle opposé égal et la bissectrice intérieure de cet angle égale.

3. — Déduire de l'exercice précédent qu'un triangle est isocèle s'il a deux bissectrices intérieures égales.

4. — Le triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs d'un triangle, admet ces hauteurs et les côtés du triangle pour bissectrices. Evaluer en fonction des angles du triangle donné les angles de la figure ainsi formée.

5. — Le cercle qui passe par les pieds des hauteurs d'un triangle passe aussi par les milieux des côtés et par les milieux des segments qui vont du point de rencontre des hauteurs aux trois sommets. Ce cercle est appelé *cercle des neuf points;* son centre est le milieu de la droite qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit.

6. — Le trapèze isocèle est le seul trapèze inscriptible.

7. — Le rectangle est le seul parallélogramme inscriptible.

8. — Le lieu géométrique des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un de ces points sur les trois côtés d'un triangle soient en ligne droite, est le cercle circonscrit à ce triangle.

9. — Quel est le lieu géométrique des milieux des cordes d'une circonférence qui passent par un point donné ?

10. — Quel est le lieu géométrique du point de concours des hauteurs d'un triangle qui a une base donnée et dont l'angle opposé a une grandeur donnée ?

11. — Deux circonférences O et O′ se coupent en un point A ; les tangentes à ces deux circonférences en ce point forment un angle qui est le supplément de l'angle OAO′. (L'angle de ces deux tangentes est l'angle sous lequel se coupent les deux circonférences données.)

12. — Quel est le lieu géométrique des centres des circonférences de rayon donné qui coupent une circonférence donnée sous un angle donné ?

13. — Deux circonférences O et O′ se coupent en un point A ; par ce point A on mène deux sécantes qui coupent respectivement les circonférences en B et B′, C et C′. Les deux droites BC et B′C′ se coupent sous un angle constant. Que devient cet énoncé si les deux circonférences sont tangentes ?

14. — Deux circonférences O et O′ se coupent en un point A ; par ce point A on mène une sécante quelconque qui coupe les circonférences en B et B′. Les tangentes en B et B′ aux circonférences O et O′ se coupent sous un angle constant. Que devient cet énoncé si les deux circonférences sont tangentes ?

15. — Deux circonférences sont tangentes en un point A ; on mène une tangente à l'une en B qui coupe l'autre en C et D ; la droite AB est bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle CAD.

§ 5. — Problèmes et constructions graphiques.

128. — Pour dessiner sur le papier, on place la feuille de papier sur une *planchette* qui doit être parfaitement plane ; on s'assurera que cette condition est remplie en procédant comme nous l'avons dit au nº 10.

Pour tracer des lignes droites, on se sert d'une *règle* bien dressée. On s'assurera qu'une règle est bien dressée de la façon suivante : ayant appliqué la règle sur le papier, on tracera une ligne ACB en suivant le bord de la règle qu'on veut vérifier, d'un bout à l'autre avec la pointe fine d'un crayon (*fig.* 99) ; puis on retournera la règle de façon que ses extrémités A et B restent fixes, et on tracera la ligne AC′B en suivant le bord de la règle dans sa nouvelle position. Il est clair, d'après les propriétés de la ligne droite, que si les deux lignes ACB, AC′B coïncident dans toutes leurs parties, la règle est bien dressée ; sinon elle est défectueuse et à rejeter.

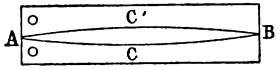


Fig. 99.

Pour tracer des circonférences ou des arcs de cercle, on se sert d'un *compas ;* un bon compas doit s'ouvrir et se refermer sans trop de facilité comme aussi sans secousses.

On emploie encore pour dessiner l'*équerre*, qui a la

forme d'un triangle rectangle. Les bords d'une bonne équerre doivent être parfaitement rectilignes, ce dont on s'assurera en procédant comme s'il s'agissait d'une règle. Il faut, en outre, que l'angle droit de l'équerre soit réellement droit, ce qui se vérifiera de la façon suivante. Appliquant l'équerre le long d'une règle, par un des côtés de l'angle droit (*fig.* 100), on tracera une ligne AC en suivant avec le crayon l'autre côté de l'angle droit ; puis on retournera l'équerre de façon que le sommet A reste fixe et que le côté AB continue à être appliqué le long de la règle dans sa nouvelle position AB′ ; on tracera alors la ligne AC′ en suivant, comme précédemment, l'autre côté de l'angle droit. Il est clair, d'après les propriétés de l'angle droit, que si les lignes AC, AC′ coïncident l'équerre est juste ; sinon, elle est défectueuse et à rejeter.

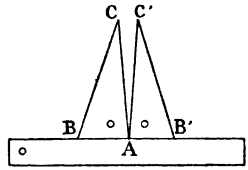


Fig. 100.

L'équerre peut jouer le rôle de règle ; il vaut souvent mieux se servir de deux équerres que d'une règle et d'une équerre.

Enfin, on se sert pour mesurer ou construire les angles d'un instrument appelé *rapporteur ;* c'est un demi-cercle en corne ou en cuivre dont le bord circulaire, ou *limbe*, est divisé en degrés ou demi-degrés ; le diamètre et le centre du demi-cercle sont mis en évidence sur le rapporteur (*fig.* 101).

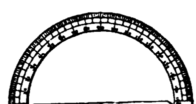


Fig. 101.

On obtient immédiatement la mesure d'un angle en degrés, en appliquant le rapporteur sur cet angle de façon que son centre coïncide avec le sommet de l'angle et que son diamètre coïncide avec l'un des côtés de l'angle ; l'autre côté de l'angle rencontre alors le limbe en un certain point et il suffit de lire sur le rapporteur le nombre de degrés et fractions de degrés que contient l'arc compris entre les côtés de l'angle.

Inversement, on pourra construire avec le rapporteur un angle dont la mesure en degrés sera donnée : le procédé est intuitif.

Ajoutons encore qu'il est indispensable d'avoir à sa disposition un double décimètre bien dressé et bien divisé, à l'aide duquel on pourra mesurer les longueurs et les comparer comme avec le compas.

Problème I

129. — Construire un angle égal à un angle donné BAC qui ait un sommet D donné et un côté DE donné (*fig.* 102).

Des points A et D comme centres, avec un même rayon arbitraire, décrivons deux arcs de cercle BC, EE′; puis, du point E comme centre avec la longueur BC pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe l'arc EE′ en F. L'angle EDF est l'angle cherché, car les deux arcs BC, EF qui mesurent les angles BAC, EDF sont égaux comme appartenant à des circonférences égales et ayant des cordes égales (**97**).

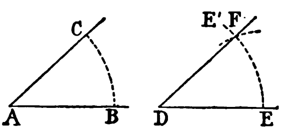


Fig. 102.

Il y aurait une seconde solution de l'autre côté de DE.

Remarque. — Dans ce problème et les analogues, il suffira toujours de tracer les parties utiles des arcs dont on parle.

Problème II

130. — Connaissant deux angles A, B d'un triangle, construire le troisième (*fig.* 103).

Sur une droite EE′ prenons un point D et construisons un angle EDF égal à l'angle A donné, puis un angle FDG égal à l'angle B donné; l'angle GDE′ sera l'angle

cherché, puisque la somme des trois angles EDF, FDG, GDE′ vaut deux angles droits (22, 68).

Le problème n'a de sens que si la somme des deux angles donnés est inférieure à deux angles droits.

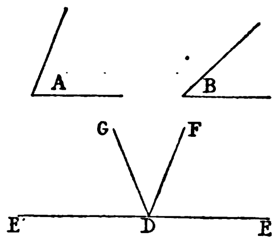


Fig. 103.

Remarque. — Les deux problèmes précédents pourraient être facilement résolus à l'aide du rapporteur; mais on doit éviter, le plus possible, l'emploi de cet instrument.

Problème III

131. — Construire un triangle, connaissant un côté *a* et deux angles (*fig.* 104).

On peut toujours supposer que les deux angles donnés sont les angles B et C qui ont pour sommets les extrémités du côté donné : car, connaissant deux angles d'un triangle, on peut construire le troisième (130).

Prenons une longueur DE égale au côté donné *a*; construisons les angles EDD′, DEE′ égaux respectivement aux angles donnés B et C; si les demi-droites DD′, EE′ se coupent en un point F, le triangle DEF répond à la question. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux demi-droites DD′, EE′ se coupent, c'est-à-dire (63) que la somme des deux angles donnés soit inférieure à deux angles droits, ce qui était évident *a priori* (68).

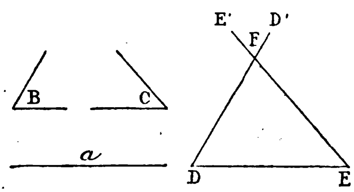


Fig. 104.

En disposant les angles B et C en ordre inverse par rapport au côté *a*, on obtiendrait un second triangle

répondant à la question, mais égal au précédent (**35**). On pourra faire des remarques analogues dans quelques-uns des problèmes suivants.

Problème IV

132. — Construire un triangle, connaissant deux côtés *b*, *c* et l'angle compris A (*fig.* 105).

Soit E'DF' un angle égal à l'angle A ; prenons DE $=c$, DF $=b$; le triangle DEF répond à la question.

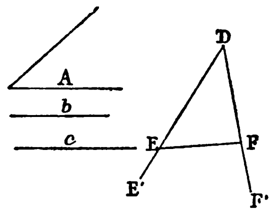


Fig. 105.

Le problème est toujours possible.

Problème V

133.— Construire un triangle, connaissant les trois côtés *a*, *b*, *c* (*fig.* 106).

Soit EF une longueur égale à a; des points E et F comme centres, avec des rayons respectivement égaux à c

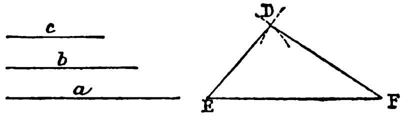


Fig. 106.

et b, décrivons deux arcs de cercle; si ces deux arcs de cercle se coupent en un point D, le triangle DEF répond à la question.

Pour que le problème soit possible, il est nécessaire et suffisant que les deux arcs de cercle dont nous venons de parler, se coupent et, par suite (105), que l'on ait :

$$a < b + c \text{ et } a > b - c,$$

ce qui était évident *a priori* (34).

On peut dire simplement qu'il est nécessaire et suffisant que le plus grand des trois côtés donnés soit inférieur à la somme des deux autres.

Problème VI

134. — Construire un triangle, connaissant deux côtés *b*, *c* et l'angle B opposé à l'un d'eux *b* (*fig.* 107).

Construisons un angle DEG égal à l'angle B donné et soit EG′ le prolongement de EG.

Prenons ED $= c$ et, du point D comme centre, décrivons une circonférence K avec b comme rayon. Si cette

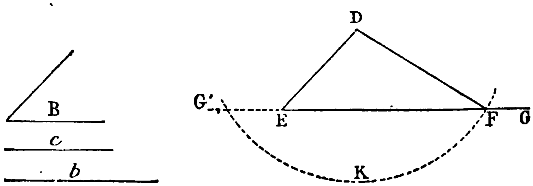


Fig. 107.

circonférence rencontre la demi-droite EG en un point F, le triangle DEF répond à la question.

Discussion. — Le problème peut avoir deux solutions, ou une seule, ou aucune, suivant que la circonférence K rencontre la demi-droite EG en deux points, ou en un seul, ou ne la rencontre pas du tout.

1° Supposons $b > c$ (*fig.* 107). Alors le point E est intérieur à la circonférence K, de sorte que la demi-droite EG

rencontre cette circonférence en un point et un seul F (83). Le problème a donc une solution et une seule.

2° Supposons $b < c$ (*fig.* 108 *et* 109); si DH est la perpendiculaire abaissée de D sur EG et si b est $<$ DH, le problème est impossible, puisque alors la circonférence K ne rencontre pas la droite GG′.

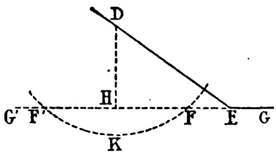


Fig. 108.

Si b est $>$ DH, cette circonférence rencontre GG′ en deux points F, F′ qui sont situés tous les deux du même côté que H par rapport au point E, puisque E est extérieur à K, tandis que H est intérieur à K. Ces deux points sont donc sur la demi-droite EG′ ou sur la demi-droite EG, suivant que l'angle donné, B = DÊG, est obtus ou aigu (48). Par suite, si l'angle B est obtus, il n'y a pas de solution; s'il est aigu, il y a deux solutions.

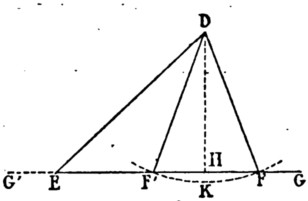


Fig. 109.

En résumé :

$$\begin{array}{lll} b > c \ldots\ldots\ldots & & \text{une solution,} \\ b < c \left\{ \begin{array}{l} \text{B obtus} \ldots\ldots \\ \text{B aigu} \left\{ \begin{array}{l} b < \text{DH} \ldots \\ b > \text{DH} \ldots \end{array} \right. \end{array} \right. & & \begin{array}{l} \text{pas de solution,} \\ \text{pas de solution,} \\ \text{deux solutions.} \end{array} \end{array}$$

3° *Cas particuliers.* — Si $b = c$, il y a une solution si B est aigu.

Si $b =$ DH, il y a une solution si B est aigu : c'est le triangle rectangle DEH (*fig.* 109).

Si B est un angle droit, il y a une solution si $b > c$.

Remarque. — On peut tirer de cette discussion la démonstration du théorème proposé dans l'exercice 3 du § 3 (*Livre I*).

Problème VII

135. — Par un point donné B, pris hors d'une droite AA', mener la parallèle à cette droite (*fig.* 110).

Du point B comme centre, avec un rayon quelconque, décrivons un arc de cercle C qui coupe la droite donnée en A'; de A' comme centre, avec le même rayon, décrivons un arc de cercle qui ira passer par B et coupera la droite donnée en A.

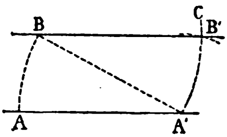


Fig. 110.

Avec AB comme rayon décrivons, du point A' comme centre, un arc de cercle qui coupera l'arc C en un point B'; la droite BB' est la parallèle cherchée.

En effet, d'après les constructions faites, les angles alternes-internes AA'B, A'BB' sont égaux (**129**), et, par suite, les droites AA', BB' sont parallèles (**62**).

136. — On préfère, en général, résoudre ce problème, à l'aide de l'équerre, de la façon suivante (*fig.* 111).

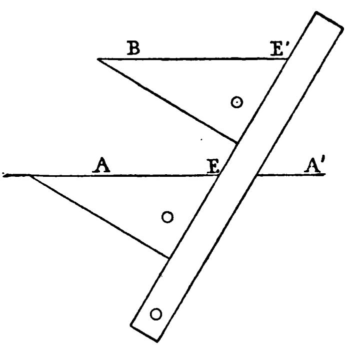


Fig. 111.

Plaçons l'équerre de façon que son hypoténuse coïncide avec la droite donnée AA', et appuyons une règle contre l'un des côtés de l'angle droit de l'équerre. Maintenons la règle immobile et faisons glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que son hypoténuse vienne passer par le point donné B : il suffit de tracer une droite le long de cette hypoténuse, dans sa nouvelle position, pour obtenir la parallèle cherchée : car les angles de l'équerre E et E' sont correspondants et égaux (**62**).

Problème VIII

137. — Mener une perpendiculaire sur un segment de droite AB, en son milieu (*fig.* 112).

Il suffit de trouver deux points équidistants des points A et B (50) ; à cet effet, on décrit des points A et B comme centres avec un même rayon quelconque, suffisamment grand, deux circonférences qui se coupent en deux points C et D : la droite CD sera perpendiculaire sur AB en son milieu E.

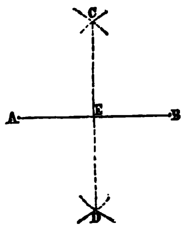


Fig. 112.

La droite AB n'a pas besoin d'être tracée pour construire la perpendiculaire CD.

Cette même construction servira à trouver le milieu E de la droite AB.

Problème IX

138. — Diviser un arc de cercle AMB en deux parties égales (*fig.* 113).

Il suffit de mener la perpendiculaire sur AB en son milieu (92). Cette droite coupe l'arc en son milieu M.

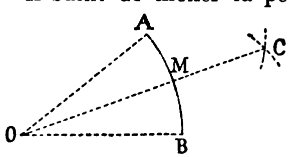


Fig. 113.

Si on connaît le centre O de l'arc, il suffira de déterminer un point C de cette perpendiculaire, puisqu'elle passe par le centre O; la figure correspond à ce cas.

Problème X

139. — Diviser un angle AOB en deux parties égales (*fig.* 114).

Du point O comme centre, décrivons une circonférence

de rayon quelconque qui coupe les côtés de l'angle donné, respectivement en D et E; on est alors ramené à construire la perpendiculaire sur DE, en son milieu (41).

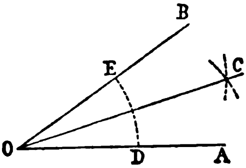


Fig. 114.

Il suffira, d'ailleurs, de déterminer un point C de cette perpendiculaire, puisqu'elle passe par le point O.

Problème XI

140. — Décrire une circonférence passant par trois points donnés non en ligne droite.

Il suffit d'appliquer ce qui a été dit au n° 100.

Si l'on voulait déterminer le centre d'une circonférence tracée, on déterminerait, d'après cette construction, le centre de la circonférence passant par trois points arbitrairement choisis sur la circonférence donnée.

Problème XII

141. — Mener, par un point donné C, une perpendiculaire sur une droite donnée AB.

1° Le point C est sur la droite donnée (*fig.* 115). Décrivons, de C comme centre avec un rayon quelconque, une circonférence qui coupe la droite donnée en a et b, on est alors ramené à construire une perpendiculaire sur ab en son milieu, et il suffira d'en déterminer un point D, comme l'indique la figure, puisque cette perpendiculaire passe en C.

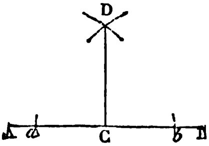


Fig. 115.

2° Le point C est en dehors de la droite donnée (*fig.* 116).

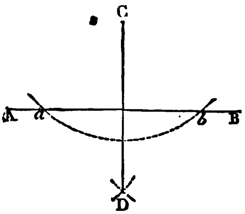


Fig. 116.

Décrivons, de C comme centre avec un rayon quelconque, une circonférence qui coupe la droite donnée en *a* et *b;* on est alors ramené à construire une perpendiculaire sur *ab* en son milieu, et il suffira d'en déterminer un point D, comme l'indique la figure, puisque cette perpendiculaire passe en C.

142. — Le même problème se résoudrait immédiatement à l'aide d'une équerre exacte; mais l'équerre doit plutôt servir à construire des parallèles que des perpendiculaires. Dans un dessin soigné, les problèmes sur les perpendiculaires doivent être résolus à l'aide du compas, comme nous venons de l'indiquer. L'équerre ne sera utilisée, dans le tracé des perpendiculaires, que dans le cas où il faudra mener par un point C une perpendiculaire à une droite AA′, connaissant déjà une perpendiculaire BB′ à cette droite AA′; il suffira alors, en effet, de mener par C une parallèle à BB′, ce qui se fera à l'aide de l'équerre (**136**).

Problème XIII

143. — Mener, par un point donné A, une tangente à une circonférence donnée O (*fig.* 117).

Si le point A est à l'intérieur de la circonférence, le problème n'a pas de solution (87). Si le point A est sur la circonférence, on ne peut faire passer d'autre tangente par ce point que celle qui admet A pour point de contact (87) : on la construira en remarquant qu'elle est perpendiculaire au rayon OA.

Examinons maintenant le cas où le point A est extérieur à la circonférence et supposons le problème résolu : AB est une tangente passant par A, dont B est le point

de contact. L'angle ABO est donc droit, et, par suite, son sommet B appartient à la circonférence décrite sur AO comme diamètre (125); réciproquement, tout point commun B à cette circonférence et à la circonférence O est le point de contact d'une tangente menée par A à la circonférence donnée.

Pour résoudre le problème, on décrira donc une circonférence sur AO comme diamètre et, pour cela, il suffira de déterminer le milieu de AO; cette circonférence coupera la circonférence donnée en deux points B et B'; les deux droites AB et AB' répondront à la question, de sorte que le problème admet deux solutions.

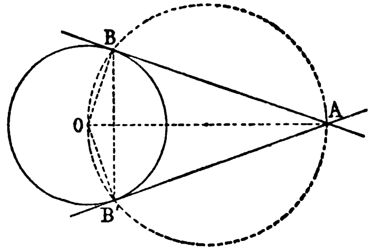


Fig. 117.

144. Remarque. — *Les deux tangentes* AB, AB' *sont égales; la droite* AO *est bissectrice des angles* BAB', BOB' *et perpendiculaire sur la droite* BB' *en son milieu.*

Il suffit, pour démontrer ces propositions, de remarquer que si on fait tourner le demi-plan AOB autour de AO, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le demi-plan AOB', le point B vient coïncider avec le point B' (102).

Problème XIV

145. — Mener, à une circonférence donnée O, une tangente parallèle à une droite donnée CD (*fig.* 118).

Le diamètre perpendiculaire à CD coupe la circonférence O aux deux points A et B : les tangentes AA', BB' en ces points, répondent à la question (86). Le problème admet donc deux solutions et il est clair qu'il n'en admet pas davantage.

Problème XV

146. — Décrire, sur une droite limitée donnée AB, un segment capable d'un angle donné (*fig.* 119).

La droite AB, prolongée indéfiniment, partage le plan en deux régions AMB, ANB; supposons que le segment cherché soit situé dans la région AMB, et imaginons que le problème soit résolu. L'arc AMB, qui répond à la question, appartient à une circonférence dont il suffit de déterminer le centre O. Menons en A, dans la région ANB du plan, une demi-droite AC tangente à la circonférence O : l'angle BAC est égal à l'angle donné, puisqu'il a pour mesure, comme celui-ci, la moitié de l'arc ANB (**121**). Nous pouvons donc construire la demi-droite AC sans supposer le problème résolu; il suffira de construire, dans la région ANB du plan, un angle BAC égal à l'angle donné. Si, alors, nous remarquons que le point O est sur la perpendiculaire AO à AC en A (**86**) et sur la perpendiculaire OD à AB en son milieu D (**92**), nous voyons qu'il est facile de construire le point O et, par suite, l'arc AMB cherché.

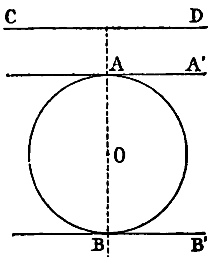


Fig. 118.

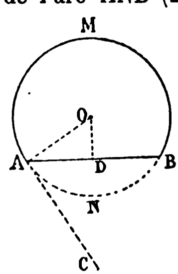


Fig. 119.

Dans la région AMB du plan, le problème admet une solution et une seule; il en est de même dans la région ANB.

Problème XVI

147. — Construire un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle ABC (*fig.* 120).

Tout point équidistant des trois côtés du triangle est le centre d'un cercle tangent à ces trois côtés et récipro-

quement. Or le lieu géométrique des points équidistants de AB et de BC est l'ensemble des deux bissectrices BI, BI′ de l'angle B et de son supplément (53); de même, le lieu géométrique des points équidistants de AC et de BC est l'ensemble des deux bissectrices CI, CI′ de l'angle C et de son supplément.

BI et CI se coupent en un point I, situé dans l'intérieur du triangle, et qui est le centre d'un cercle répondant à

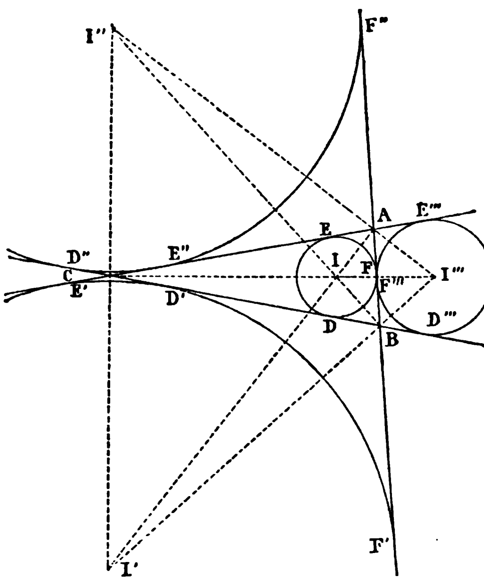


Fig. 120.

la question : c'est le cercle *inscrit* dans le triangle ABC. Ajoutons que AI est bissectrice de l'angle BAC, puisque I est équidistant de AB et de AC.

BI′ et CI′ se coupent en un point I′ extérieur au triangle ABC, mais intérieur à l'angle A, et qui est le centre d'un second cercle répondant à la question : ce cercle, *exinscrit* au triangle dans l'angle A, touche le

côté BC entre B et C, et les côtés AB, AC sur leurs prolongements. Ajoutons que AI′ est bissectrice de l'angle A.

BI et CI′ se coupent en un point I″ extérieur au triangle mais intérieur à l'angle B et qui est le centre d'un troisième cercle répondant à la question; ce cercle, *exinscrit* au triangle dans l'angle B, touche le côté AC entre A et C, et les deux autres côtés sur leurs prolongements. Ajoutons que la droite AI″ est la bissectrice du supplément de l'angle A.

Enfin BI′ et CI se coupent en un point I‴, extérieur au triangle mais intérieur à l'angle C, et qui est le centre d'un quatrième cercle répondant à la question; ce cercle, *exinscrit* au triangle dans l'angle C, touche le côté AB entre A et B, et les deux autres côtés sur leurs prolongements. Ajoutons que la droite AI‴ est la bissectrice du supplément de l'angle A.

Le problème admet donc quatre solutions : il y a un cercle inscrit et trois cercles exinscrits.

Remarque. — La démonstration du théorème suivant résulte immédiatement de ce qui précède : *Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes; il en est de même des bissectrices extérieures de deux angles et de la bissectrice intérieure du troisième angle.*

148. — Soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, AC, AB. Faisons en outre (nous garderons d'ailleurs ces notations dans toutes les questions sur le triangle) :

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad a + b + c = 2p,$$

de sorte que p est le demi-périmètre du triangle.

On a

$$(1) \quad \begin{array}{l} AE = b - CE \\ AF = c - BF. \end{array}$$

Or AE et AF sont deux tangentes issues de A au cercle I · on a donc (**144**) $AE = AF$; de même on aura $CE = CD$, $BF = BD$.

Ajoutant membre à membre les deux égalités (1) et utilisant les relations qui précèdent, on obtient :

$$2AE = b + c - CD - BD,$$

ce qu'on peut écrire, puisque $BD + CD = a$,

$$2AE = b + c - a.$$

Or on a $$a + b + c = 2p;$$

retranchant $2a$ aux deux membres, il reste

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a),$$

et par suite $$2AE = 2(p - a)$$

ou bien $$AE = AF = p - a.$$

On démontrerait de même les relations

$$BD = BF = p - b$$
$$CD = CE = p - c.$$

Soient D', E', F' les points de contact du cercle exinscrit I' avec les côtés BC, AC, AB. On a :

$$(2)\quad \begin{aligned} AE' &= b + CE' \\ AF' &= c + BF'; \end{aligned}$$

or comme plus haut on a : $AE' = AF'$, $CE' = CD'$, $BF' = BD'$; ajoutant membre à membre les égalités (2), on obtient par suite

$$2AE' = b + c + CD' + BD'.$$

Ce qu'on peut écrire, puisque $BD' + CD' = a$,

$$2AE' = b + c + a = 2p$$

ou enfin $$AE' = AF' = p.$$

Portant ces valeurs dans les égalités (2), on en déduit tout de suite :

$$BD' = BF' = p - c$$
$$CD' = CE' = p - b.$$

On démontrerait des formules analogues en considérant les deux autres cercles exinscrits I'' et I'''.

Remarquons enfin que $BD = CD' = p - b$; le milieu du segment DD' coïncide par suite avec le milieu du côté BC.

Problème XVII

149. — Mener une tangente commune à deux circonférences données O et O'.

Cherchons d'abord une tangente commune *extérieure*, c'est-à-dire laissant les deux circonférences données d'un même côté.

Supposons le problème résolu (*fig.* 121) et soit AB une

droite répondant à la question, touchant les deux circonférences O et O′ en A et B respectivement.

Par le centre O′ de la plus petite circonférence, menons la parallèle à AB qui coupe OA en C.

La figure ABO′C est un rectangle, puisque OA et O′B sont perpendiculaires sur AB. Il en résulte que O′C est tangente à la circonférence décrite de O comme centre avec OC pour rayon, et que OC est égal à la différence des rayons des deux circonférences données, puisque l'on a $OC = OA - AC$ et aussi $AC = O'B$, de sorte que $OC = OA - O'B$.

Réciproquement, du centre O de la plus grande des deux circonférences données, décrivons une circonférence avec la différence des rayons de ces deux circonférences pour rayon, et menons par O′ une tangente O′C à cette circonférence; la demi-droite OC prolongée rencontre la

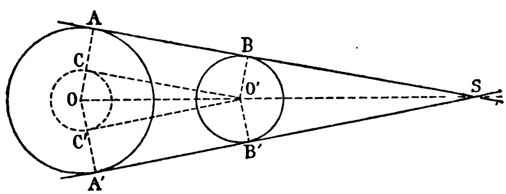


Fig. 121.

circonférence O en A; la tangente en A à la circonférence O est aussi tangente à la circonférence O′, puisque sa distance à O′ est égale à AC, c'est-à-dire à O′B (**83**).

Le problème admettra deux solutions, si du point O′ on peut mener deux tangentes à la circonférence OC, c'est-à-dire si le point O′ est extérieur à cette circonférence; pour que cela soit, il faut et il suffit que l'on ait $OO' > OC$, et, puisque OC est la différence des rayons des deux circonférences données, il faut que celles-ci ne soient ni intérieures l'une à l'autre, ni tangentes intérieurement (**105**).

Si les deux circonférences données sont intérieures l'une à l'autre, le même raisonnement montre qu'il n'y a pas de solution; si elles sont tangentes intérieurement, il y a

une seule solution, qui est la tangente commune au point de contact (103).

Lorsqu'il y a deux solutions AB, A′B′, ces deux droites se coupent en un point S de la ligne des centres OO′ : on démontrera cette proposition, ainsi que d'autres faciles à énoncer, en faisant tourner le demi-plan OO′A autour de OO′ jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le demi-plan OO′A′ ainsi que nous l'avons fait souvent.

Si les deux circonférences étaient égales, les deux tangentes communes extérieures seraient parallèles à la ligne des centres.

Cherchons maintenant une tangente commune *intérieure*, c'est-à-dire laissant les deux circonférences données de côtés différents.

En raisonnant comme précédemment, on sera conduit à la construction suivante (*fig.* 122) : du centre O de l'une des deux circonférences données, décrivons une circonférence avec la somme des rayons de ces deux circonférences pour rayon, et menons par O′ une tangente O′C à cette circonférence; la demi-droite OC rencontre la circonférence O en A; la tangente en A à cette circonférence est aussi tangente à la circonférence O′ et répond à la question.

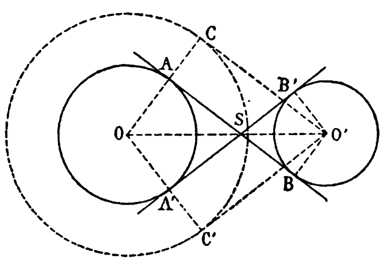


Fig. 122.

Le problème admet deux solutions si OO′ > OC, c'est-à-dire si les deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre. Il en admet une seule, qui est la tangente commune au point de contact, si les deux circonférences sont tangentes extérieurement; il n'en admet aucune dans tous les autres cas.

Lorsqu'il y a deux solutions, AB, A′B′, ces deux droites se coupent en un point S de la ligne des centres OO′.

Il sera facile, d'après cela, de faire le tableau des tangentes communes à deux circonférences dans tous les cas possibles.

Problème XVIII

150. — Trouver un point M tel que deux segments donnés AB, CD soient vus de ce point sous des angles donnés (*fig.* 123).

Il est clair que le point M est le point d'intersection de deux arcs AMB, CMD décrits sur AB et CD comme cordes, et capables respectivement des angles donnés.

Supposons, en particulier, que les deux segments aient une extrémité commune ; la discussion devient alors facile : nous laissons au lecteur le soin de la faire.

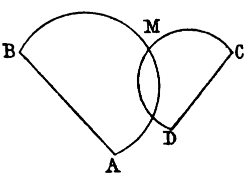


Fig. 123.

Dans ce dernier cas, le problème reçoit souvent le nom de *problème de la carte :* sa solution permet, en effet, de trouver sur une carte quelle est la position occupée par un observateur qui voit les distances AB, BC de trois objets remarquables A, B, C portés sur cette carte sous des angles donnés.

Exercices

1. — Construire la bissectrice de l'angle de deux droites dont le point d'intersection est en dehors des limites du dessin.

2. — Construire une perpendiculaire sur une demi-droite en son origine A, dans le cas où il est impossible de prolonger cette demi-droite au delà du point A. (On ne se servira pas de l'équerre.)

3. — Mener une perpendiculaire sur une droite par le point d'intersection supposé inaccessible de deux droites données.

4. — Mener par un point une droite qui aille passer par le point d'intersection supposé inaccessible de deux droites données.

5. — Construire une circonférence passant par trois points donnés A, B, C, lorsque le centre de cette circonférence tombe en dehors des limites du dessin. Justifier le procédé suivant : des points A et B comme centres on décrit deux circonférences avec un même rayon quelconque ; soit P l'un des points d'intersection de CA avec la circonférence A, Q l'un des points d'in-

tersection de CB avec la circonférence Q ; on prend sur les deux circonférences deux arcs égaux PP′, QQ′ dans le même sens de rotation ; les droites AP′, BQ′ se coupent en un point M qui appartient à la circonférence cherchée passant par les points A, B, C.

6. — Construire une circonférence tangente à trois droites données, dont deux sont parallèles.

7. — Décrire une circonférence de rayon donné ou passant par un point donné qui soit également distante de trois points donnés non en ligne droite.

8. — Tracer une circonférence qui soit également distante de quatre points donnés, dont trois quelconques ne sont pas en ligne droite.

9. — Inscrire dans un cercle une corde de longueur donnée, parallèle à une droite donnée, ou passant par un point donné.

10. — Décrire un cercle touchant deux droites ou deux circonférences ou une droite et une circonférence données, et l'une de ces lignes en un point donné.

11. — Par un point, mener une droite qui soit divisée en deux parties égales par les côtés d'un angle donné.

12. — Par l'un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante qui ait son milieu en ce point.

13. — Des sommets d'un triangle comme centres décrire trois cercles qui se touchent deux à deux.

14. — Construire un triangle rectangle, connaissant l'excès de l'hypoténuse sur un des côtés de l'angle droit et l'autre côté de l'angle droit, ou bien un angle aigu.

15. — Construire un triangle, connaissant deux côtés et une médiane ; ou bien un côté et deux médianes; ou bien les trois médianes.

16. — Construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

17. — Construire un triangle, connaissant les angles et la somme de deux côtés.

18. — Construire un triangle, connaissant les angles et le périmètre.

19. — Construire un triangle, connaissant un angle, un côté et une hauteur.

20. — Construire un triangle, connaissant un angle, une hauteur et le périmètre.

21. — Construire un triangle, connaissant les pieds des trois hauteurs.

22. — Construire un triangle, connaissant trois des quatre centres des cercles qui sont tangents à ses côtés.

23. — Construire un triangle, connaissant la hauteur, la médiane et la bissectrice intérieure ou extérieure issues d'un même sommet.

Questions diverses

1. — Si deux circonférences sont tangentes extérieurement en un point A, la tangente commune en A passe par le milieu de chacune des tangentes communes extérieures à ces deux circonférences.

2. — Le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle est égal à l'excès du demi-périmètre de ce triangle sur l'hypoténuse.

Le rayon du cercle exinscrit à un triangle rectangle dans l'angle droit est égal au demi-périmètre de ce triangle.

3. — Si un cercle est tangent aux quatre côtés d'un quadrilatère convexe, la somme ou la différence de deux côtés opposés de ce quadrilatère est égale à la somme ou à la différence des deux autres côtés opposés, suivant que le cercle est inscrit ou exinscrit au quadrilatère. Les réciproques sont vraies. Quelles sont les principales propriétés des quadrilatères convexes qui admettent deux cercles tangents à leurs quatre côtés ?

4. — Quel est le lieu géométrique des centres des cercles inscrits et exinscrits à un triangle dont la base est donnée ainsi que la grandeur de l'angle opposé ?

5. — Quel est le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit à un triangle dont on donne un angle en grandeur et en position, ainsi que la somme ou la différence des côtés qui forment cet angle ?

6. — Calculer les divers segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les points de contact des cercles inscrits et exinscrits en supposant :

1° $a = 15^m, b = 14^m, c = 13^m$;
2° $a = 5^m, b = 4^m, c = 3^m$.

Réponse. — En se reportant à la figure 120 on a :

1° $AE' = AF' = BD'' = BF'' = CD''' = CE''' = 21^m$; $AE = AF = BD''' = BF''' = CD'' = CE'' = 6^m$; $AE''' = AF''' = BD = BF = CD' = CE' = 7^m$; $AE'' = AF'' = BD' = BF' = CD = CE = 8^m$.

2° $AE' = AF' = \ldots = 6^m$; $AE = AF = \ldots = 1^m$; $AE''' = AF''' = \ldots = 2^m$; $AE'' = AF'' = \ldots = 3^m$.

LIVRE III

LES LIGNES PROPORTIONNELLES

§ 1er. — Les segments proportionnels.

151. — Considérons deux points fixes, A et B, situés sur une droite indéfinie X'X (*fig.* 124), et un point variable M situé sur cette même droite. Nous nous proposons d'étudier la variation du rapport $\frac{MA}{MB}$ des distances du point M aux deux points A et B, lorsque le point M décrit la droite X'X.

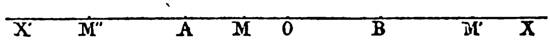


Fig. 124.

1° Supposons le point M situé entre A et B : si le point M se meut de A vers B, la distance MA augmente constamment, tandis que la distance MB diminue constamment. Il en résulte que le rapport $\frac{MA}{MB}$ augmente constamment ; en effet, ce rapport est le nombre qui mesure MA quand on prend MB pour unité, et il est clair que, si la grandeur à mesurer augmente en même temps que l'unité diminue, le nombre qui est le résultat de cette mesure augmente nécessairement.

D'ailleurs ce rapport peut prendre telle valeur qu'on

voudra donnée à l'avance, $\frac{7}{5}$ par exemple : en effet, l'égalité

$$\frac{MA}{MB} = \frac{7}{5}$$

est équivalente à celle-ci (111) :

$$\frac{MA}{MA + MB} = \frac{7}{7 + 5} \quad \text{ou} \quad \frac{MA}{AB} = \frac{7}{12};$$

or, lorsque le point M décrit le segment AB, il est clair que MA augmentant d'une façon continue, depuis zéro jusqu'à AB, ce point pourra prendre une position et une seule, telle que, ainsi que l'exprime l'égalité précédente, la longueur MA soit égale aux sept douzièmes de la longueur AB; en effet, le nombre $\frac{7}{12}$ est inférieur à l'unité, d'après la façon dont il a été obtenu.

Il en sera de même, quelle que soit la valeur donnée à l'avance pour le rapport $\frac{MA}{MB}$.

En résumé, le point M étant situé entre A et B, le rapport $\frac{MA}{MB}$ augmente constamment lorsque M va de A vers B, et prend une fois, mais une fois seulement, une valeur quelconque donnée à l'avance.

Si O est le milieu de AB, le rapport $\frac{OA}{OB}$ est égal à 1; donc, si M est entre A et O, le rapport $\frac{MA}{MB}$ est inférieur à 1; si M est entre O et B, le rapport $\frac{MA}{MB}$ est supérieur à 1.

2° Supposons le point M situé en M' sur la demi-droite BX. On peut écrire :

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{M'B + AB}{M'B} = \frac{M'B}{M'B} + \frac{AB}{M'B} = 1 + \frac{AB}{M'B}.$$

Le rapport considéré est donc toujours supérieur à 1,

il dépasse 1 de $\frac{AB}{M'B}$; or ce second rapport va constamment en diminuant si M′ s'éloigne du point B, puisque AB reste fixe, tandis que M′B augmente constamment; donc le rapport considéré $\frac{M'A}{M'B}$ diminue constamment lui aussi, lorsque M′ s'éloigne de B, mais en restant toujours supérieur à 1.

Comme plus haut, on verra que, en outre, il existe une position du point M′, et une seule, sur la demi-droite BX, telle que le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ prenne une valeur quelconque donnée à l'avance, supérieure à l'unité.

Soit en effet, par exemple, $1 + \frac{2}{5}$ cette valeur; d'après ce qui précède, on devra avoir :

$$\frac{AB}{M'B} = \frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{M'B}{AB} = \frac{5}{2} \quad \left(\text{puisque } \frac{M'A}{M'B} = 1 + \frac{AB}{M'B}\right)$$

ce qui est possible puisque M′B augmente constamment à partir de zéro, lorsque M′ s'éloigne de B.

3° Supposons le point M situé en M″ sur la demi-droite AX′. On peut écrire :

$$\frac{M''A}{M''B} = \frac{M''B - AB}{M''B} = \frac{M''B}{M''B} - \frac{AB}{M''B} = 1 - \frac{AB}{M''B}.$$

Le rapport considéré est toujours inférieur à 1; la différence avec 1 est $\frac{AB}{M''B}$: or, ce second rapport va constamment en diminuant si M″ s'éloigne du point A, puisque AB reste fixe, tandis que M″B augmente constamment; donc, le rapport considéré $\frac{M'A}{M'B}$ augmente constamment lorsque M′ s'éloigne de A, mais en restant toujours inférieur à 1.

Comme plus haut, on verra que, en outre, il existe une position du point M″, et une seule, sur la demi-droite AX′,

telle que le rapport $\frac{M''A}{M''B}$ prenne une valeur quelconque, donnée à l'avance, inférieure à l'unité.

Soit en effet, par exemple, $1 - \frac{2}{5}$ cette valeur ; d'après ce qui précède, on devra avoir :

$$\frac{AB}{M''B} = \frac{2}{5} \text{ ou } \frac{M''B}{AB} = \frac{5}{2} \left(\text{puisque } \frac{M''A}{M''B} = 1 - \frac{AB}{M''B}\right)$$

ce qui est possible, puisque M″B augmente constamment à partir de AB, lorsque M″ s'éloigne de A, et que le nombre $\frac{5}{2}$ est supérieur à l'unité, d'après la façon dont il a été obtenu.

152. — L'étude qui précède nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Sur la droite indéfinie XX′, *il existe toujours deux points* P, Q, *et deux seulement, tels que les rapports* $\frac{PA}{PB}$, $\frac{QA}{QB}$ *des distances de chacun d'eux aux deux points fixes* A *et* B *aient une valeur quelconque donnée à l'avance ; de ces deux points, l'un* P *est toujours situé entre* A *et* B, *l'autre est toujours situé en dehors du segment* AB ; *ces deux points sont toujours situés d'un même côté du milieu* O *du segment* AB, *du même côté que* A *ou que* B, *suivant que le rapport donné est inférieur ou supérieur à l'unité* (*fig.* 125).

On dit que les deux points P et Q divisent ou partagent le segment AB dans le rapport donné. Pour éviter toute

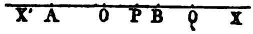


Fig. 125.

ambiguïté, les deux segments PA, PB déterminés par le point P situé entre A et B, et dont AB est la *somme*, sont dits *additifs ;* les deux segments QA, QB, déterminés par le point Q situé en dehors de AB, et dont AB est la *différence*, sont dits *soustractifs*.

Remarque. — Si le rapport donné devient égal à l'unité, le point P vient en O ; le point Q disparaît en s'éloignant indéfiniment sur la droite X'X.

Si le rapport donné devient égal à zéro, les deux points P et Q se réunissent en A.

Si le rapport donné devient infiniment grand, les deux points P et Q se réunissent en B.

Il suffit de se reporter à l'étude du numéro précédent pour justifier ces propositions.

Théorème I

153. — Une parallèle B'C' à un côté BC d'un triangle ABC partage les deux autres côtés en segments porportionnels (*fig.* 126).

En d'autres termes, on a la proportion :

$$\frac{B'A}{B'B}=\frac{C'A}{C'C}.$$

Supposons d'abord les points B' et C' situés respectivement entre les points A et B et les points A et C.

Soit, par exemple, $\frac{4}{3}$ le rapport $\frac{B'A}{B'B}$: B'A contient, par suite, quatre fois le tiers de B'B, c'est-à-dire qu'on peut partager le segment B'A en quatre parties égales entre elles, et le segment B'B en trois parties égales entre elles et égales aux précédentes. Par les points de division B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, menons des parallèles à BC qui coupent AC en des points C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 se succédant dans le même ordre ; puis, par ces points et par le point C', menons des parallèles à AB qui coupent B_2C_2, B_3C_3, B'C',

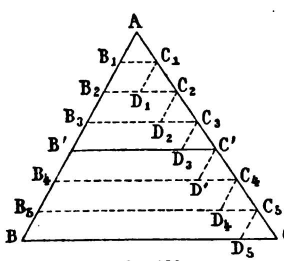


Fig. 126.

B_4C_4, B_5C_5, BC respectivement en D_1, D_2, D_3, D', D_4, D_5. Tous les triangles AB_1C_1, $C_1D_1C_2$, $C_2D_2C_3$, C_3D_3C', $C'D'C_4$, $C_4D_4C_5$, C_5D_5C ainsi formés sont égaux entre eux : en effet, ils ont leurs côtés respectivement parallèles et, par suite, ont les angles égaux (70); en outre, les côtés C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3... sont égaux respectivement aux segments B_1B_2, B_2B_3, B_3B'... comme parallèles comprises entre parallèles, et ces segments étant tous égaux entre eux et au segment AB_1 par construction, il en résulte que les côtés AB_1 C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3... des triangles considérés sont tous égaux : ces triangles ayant un côté égal et les angles égaux, sont tous égaux entre eux. Il en résulte que les segments AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C', $C'C_4$, C_4C_5, C_5C sont tous égaux comme côtés correspondants de triangles égaux : or, C'A contient quatre de ces segments et C'C en contient trois; le rapport $\frac{C'A}{C'C}$ est donc $\frac{4}{3}$, et par suite égal au rapport $\frac{B'A}{B'B}$, c. q. f. d.

Supposons maintenant les points B' et C' situés respectivement sur les côtés AB et AC prolongés, soit de A

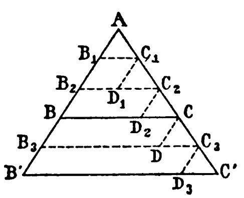


Fig. 127.

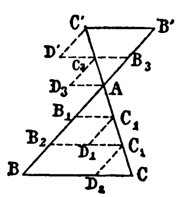


Fig. 128.

vers B et C (*fig.* 127), soit en sens inverse (*fig.* 128). Les figures montrent suffisamment qu'un raisonnement absolument semblable à celui qui précède servira à démontrer le théorème : dans la figure 127 on a supposé $\frac{B'A}{B'B} = \frac{5}{2}$; dans la figure 128, on a supposé $\frac{B'A}{B'B} = \frac{2}{5}$.

Théorème II

154. — Réciproquement, **si deux points B′ et C′ divisent respectivement les côtés AB et AC d'un triangle ABC en segments proportionnels, additifs ou soustractifs en même temps, la droite B′C′ est parallèle au troisième côté BC** (*fig.* 129).

Menons, en effet, par le point B′ la parallèle à BC qui coupe AC au point C″; d'après le théorème précédent, le rapport $\frac{C''A}{C''C}$ est égal au rapport $\frac{B'A}{B'B}$ et, par suite, d'après l'hypothèse, au rapport $\frac{C'A}{C'C}$; en outre, les segments C″A et C″C sont additifs ou soustractifs en même temps que les segments B′A et B′B et par suite en même temps que les segments C′A et C′C. Les deux points C′ et C″ partagent donc le côté CA dans le même rapport, et les segments déterminés par ces deux points sur CA sont en même temps additifs et soustractifs. Or, il n'y a qu'un point qui partage une droite en segments additifs de rapport donné, ou en segments soustractifs de rapport donné (**152**) : les deux points C′ et C″ coïncident donc nécessairement, et par suite B′C′ est parallèle à BC, c. q. f. d.

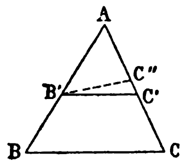


Fig. 129.

155. — De la proportion $\frac{B'A}{B'B} = \frac{C'A}{C'C}$ on peut déduire les proportions suivantes :

$$\frac{B'A + B'B}{B'B} = \frac{C'A + C'C}{C'C} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{BB'} = \frac{AC}{CC'};$$

$$\frac{B'A + B'B}{B'A} = \frac{C'A + C'C}{C'A} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'},$$

qui sont équivalentes à la première.

156. — Plus généralement, on peut énoncer la proposition suivante :

Trois droites parallèles AA′, BB′, CC′ *interceptent sur deux droites* ABC, A′B′C′ *quelconques, des segments proportionnels* (*fig.* 130).

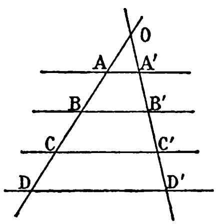


Fig. 130.

Nous allons faire voir que l'on a la proportion :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Si les deux droites AB, A′B′ sont parallèles, le théorème est évident puisque l'on a $AB = A'B'$, $BC = B'C'$.

Si les deux droites ne sont pas parallèles, soit O leur point de rencontre ; en vertu du théorème démontré au n° 153 et de la remarque qui précède, on a :

$$\frac{OB}{AB} = \frac{OB'}{A'B'}, \quad \frac{OB}{BC} = \frac{OB'}{B'C'};$$

ces proportions ayant lieu entre des grandeurs de même espèce, on peut les écrire en changeant les moyens de place (111) sous la forme :

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}, \quad \frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'};$$

ces égalités nous donnent :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

qu'on peut encore écrire, en changeant les moyens de place :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}; \text{ c. q. f. d.}$$

Il est clair que la démonstration qui précède s'applique quelle que soit la disposition de la figure.

Réciproquement, on démontrera, comme au n° 154,

que *si* AA′ *et* BB′ *sont parallèles et si les trois droites* AA′, BB′, CC′ *déterminent sur les deux droites* AB *et* A′B′ *des segments proportionnels et disposés de la même façon, la droite* CC′ *est parallèle aux droites* AA′ *et* BB′.

Remarque. — Si l'on considère une nouvelle droite DD′ parallèle à AA′, on pourra écrire la suite de rapports égaux :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'}.$$

Théorème III

157. — La bissectrice intérieure ou extérieure AD de l'angle A d'un triangle ABC partage le côté opposé BC en segments additifs ou soustractifs proportionnels aux côtés adjacents (*fig.* 131 *et* 132).

En d'autres termes, on a la proportion

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$

La démonstration qui suit s'applique aux deux cas considérés : la figure seule est à changer suivant qu'il s'agit de la bissectrice intérieure ou de la bissectrice extérieure.

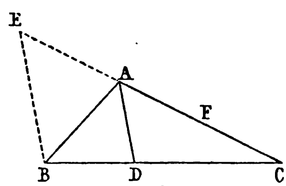


Fig. 131.

Par le point B, menons une parallèle à AD qui coupe AC en E; le triangle CBE, coupé par AD parallèle au côté BE, donne la proportion (153) :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AE}{AC}.$$

D'autre part, les angles ABE et BAD sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AD, BE coupées par AB; les angles AEB et DAF sont égaux comme correspondants par rapport aux mêmes parallèles coupées

par AC. Comme les angles BAD, DAF sont égaux par hypothèse, il en résulte que les angles ABE, AEB, qui leur sont respectivement égaux, sont égaux entre eux; le

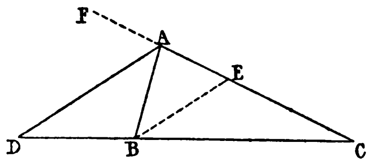


Fig. 132.

triangle ABE est donc isocèle et l'on a $AE = AB$. Remplaçant AE par AB dans la proportion obtenue plus haut, il vient

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}, \text{ c. q. f. d.}$$

Remarque. — Si $AB = AC$, la bissectrice extérieure AD est parallèle à BC.

158. — Réciproquement, *si un point* D *de la base* BC *d'un triangle* ABC *partage* BC *en segments additifs ou soustractifs proportionnels aux côtés adjacents, la droite* AD *est bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle opposé* A.

Ceci résulte immédiatement de cette propriété qu'il n'existe qu'un seul point qui divise une droite en segments additifs de rapport donné ou en segments soustractifs de rapport donné (152).

159. — Soient a, b, c, x, y les nombres qui, lorsqu'on prend une même unité quelconque, mesurent les côtés BC, AC, AB du triangle et les segments BD, CD déterminés sur BC par la bissectrice intérieure de l'angle A; on a la proportion arithmétique :

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

On en déduit :

$$\frac{x}{x+y} = \frac{c}{b+c}.$$

Comme on a $x+y=a$, il en résulte :

$$\frac{x}{a}=\frac{c}{b+c}, \text{ d'où } x=\frac{ac}{b+c}.$$

De même on a :

$$\frac{y}{x+y}=\frac{b}{b+c}, \text{ d'où } y=\frac{ab}{b+c}.$$

Si, par exemple, BC, AC, AB ont des longueurs de 15 mètres, 14 mètres, 13 mètres, on aura, en prenant le mètre pour unité, $a=15$; $b=14$; $c=13$, d'où :

$$x=\frac{13\times15}{14+13}=\frac{65}{9}=7,22\ldots \quad y=\frac{14\times15}{14+13}=\frac{70}{9}=7,77\ldots$$

Par suite, à un centimètre près, les longueurs de BD et de CD sont $7^m,22$ et $7^m,78$.

Soient x' et y' les nombres qui mesurent les segments BD, CD déterminés sur BC par la bissectrice extérieure de l'angle A; on a de même :

$$\frac{x'}{y'}=\frac{c}{b}.$$

D'où, en supposant $b>c$, on tire :

$$\frac{x'}{y'-x'}=\frac{c}{b-c} \text{ et } \frac{y'}{y'-x'}=\frac{b}{b-c}.$$

Comme on a $y'-x'=a$, il en résulte :

$$x'=\frac{ac}{b-c}, \qquad y'=\frac{ab}{b-c}.$$

En conservant les données de l'exemple précédent, on aura donc :

$$x'=\frac{13\times15}{14-13}=195, \quad y'=\frac{14\times15}{14-13}=210.$$

de sorte que les longueurs de BD et de CD seront 195 mètres et 210 mètres.

On raisonnerait d'une façon analogue si l'on avait $b<c$.

Théorème IV

160. — Le lieu géométrique des points M dont les distances à deux points fixes A et B sont dans un rapport donné, est la circonférence décrite sur CD comme diamètre, C et D étant les deux points qui partagent le segment AB dans le rapport donné (*fig.* 133).

1° Soit M un point du lieu; on a, d'après la définition des points C et D :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}.$$

Il en résulte (**158**) que les deux points C et D sont les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle M du triangle AMB. Ces deux bissectrices étant perpendiculaires l'une sur l'autre (**27**), l'angle CMD est droit, et par suite le point M appartient à la circonférence décrite sur CD comme diamètre (**125**).

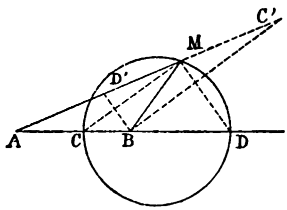


Fig. 133.

2° Soit M un point de la circonférence décrite sur CD comme diamètre; menons par B des parallèles à MC et MD qui coupent MA en C' et D'; on a dans les triangles MAC, MAD coupés par les parallèles BC', BD' aux côtés MC, MD (**155**)

$$\frac{MC'}{MA}=\frac{CB}{CA},\quad \frac{MD'}{MA}=\frac{DB}{DA};$$

comme par hypothèse les rapports $\frac{CB}{CA}$ et $\frac{DB}{DA}$ sont égaux, il résulte des égalités précédentes que les rapports $\frac{MC'}{MA}$ et $\frac{MD'}{MA}$ sont égaux, et par suite que les longueurs MC' et MD' sont égales. BM est donc une médiane du triangle BC'D'; mais ce triangle est rectangle en B, puisque les angles C'BD' et CMD sont égaux comme ayant les côtés parallèles et que l'angle CMD est droit comme inscrit dans une demi-circonférence; d'ailleurs la médiane de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la moitié de cette hypoténuse, puisque la circonférence décrite sur l'hypoténuse comme diamètre passe par le sommet de

l'angle droit ; on a donc $MC' = MD' = MB$, et par suite les égalités obtenues précédemment s'écrivent :

$$\frac{MB}{MA} = \frac{CB}{CA} = \frac{DB}{DA},$$

de sorte que le point M appartient au lieu géométrique considéré.

Le théorème énoncé est ainsi complètement démontré.

Exercices

1. — Quelle est la distance des deux points P et Q qui partagent dans un rapport donné k une longueur $AB = a$?

Application : $a = 69^{m}$; $k = \frac{11}{13}$.

Réponse. — $PQ = 411^{m},125$.

2. — Gardant les données précédentes, et appelant O le milieu du segment PQ, montrer que le point O est toujours en dehors du segment AB, et que OP est une moyenne proportionnelle entre OA et OB. — Réciproque.

3. — Quel est le rayon du cercle lieu géométrique des points dont le rapport des distances aux deux points A et B est $\frac{25}{4}$, en supposant $AB = 36^{m}$.

Réponse. — $5^{m},91...$

Quelle est la distance du centre O de ce cercle aux points A et B ?

Réponse. — $OA = 36^{m},945...$; $OB = 0^{m},945...$

4. — Dans un triangle ABC, les côtés AB et AC ont des longueurs de 47^{m} et 58^{m} ; on mène une parallèle B'C' à BC disposée comme sur la figure 127 et telle que $BB' = 100^{m}$; calculer la longueur AC'.

Réponse. — $AC' = 181^{m},40....$

5. — Dans un triangle ABC, les côtés sont : $a = 17^{m}$, $b = 12^{m}$, $c = 8^{m}$. Quels sont les segments déterminés sur les trois côtés par les bissectrices intérieures AD, BE, CF et les bissectrices extérieures AD', BE', CF' ?

R. — $BD = 6^{m},80$; $CD = 10^{m},20$; $AE = 3^{m},84$; $CE = 8^{m},16$; $AF = 3^{m},31...$; $BF = 4^{m},68...$; $BD' = 34^{m}$; $CD' = 51^{m}$; $AE' = 10^{m},66...$; $CE' = 22^{m},66...$; $AF' = 19^{m},20$; $BF' = 27^{m},20$.

6. — Dans un triangle ABC, les côtés sont $a = 85^{m}$, $b = 68^{m}$, $c = 51^{m}$. Les bissectrices intérieures sont AD, BE, CF et les bissectrices extérieures AD', BE', CF' ; calculer les longueurs des segments DD', EE', FF'.

Rép. — $DD' = 291^{m},42...$; $EE' = 127^{m},50$; $FF' = 226^{m},66...$

§ 2. — Les polygones semblables.

161. — Considérons deux polygones d'un même nombre de côtés; faisons correspondre d'une façon quelconque les angles successifs de l'un aux angles successifs de l'autre, et appelons côtés correspondants dans les deux polygones ceux qui sont adjacents à des angles respectivement correspondants.

Les deux polygones sont dits *semblables* si on peut les faire correspondre l'un à l'autre, de telle façon que leurs angles correspondants soient égaux chacun à chacun et que leurs côtés correspondants soient proportionnels.

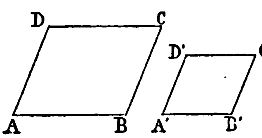


Fig. 134.

Les angles et les côtés correspondants sont alors dits *homologues*, et le rapport de deux côtés homologues quelconques est appelé *rapport de similitude* des deux polygones.

Les deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' (*fig.* 134) seront semblables si leurs éléments vérifient les relations

$$\hat{A}=\hat{A}', \hat{B}=\hat{B}', \hat{C}=\hat{C}', \hat{D}=\hat{D}', \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{A'D'},$$

et les côtés AB et A'B', par exemple, seront homologues.

Mais ces deux polygones seront encore semblables si l'on a :

$$\hat{A}=\hat{C}', \hat{B}=\hat{B}', \hat{C}=\hat{A}', \hat{D}=\hat{D}', \frac{AB}{C'B'}=\frac{BC}{B'A'}=\frac{CD}{A'D'}=\frac{DA}{D'C'};$$

l'homologue de AB dans le second polygone sera alors C'B'; etc.

Pour abréger le langage, on dit souvent que deux polygones sont semblables s'ils ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

162. — Dans deux triangles semblables, les côtés homologues sont ceux qui sont opposés aux angles homologues, c'est-à-dire aux angles égaux.

Le théorème suivant va nous montrer l'existence des triangles semblables.

Théorème V

Une parallèle B'C' à un côté BC d'un triangle ABC détermine un nouveau triangle AB'C' semblable au premier (*fig.* 135, 136, 137).

La démonstration qui suit s'applique aux trois cas de figure possibles.

En premier lieu, les deux triangles ABC, AB'C' ont les

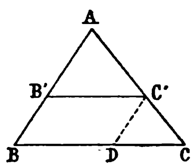


Fig. 135.

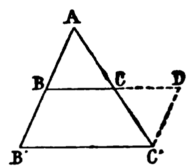


Fig. 136.

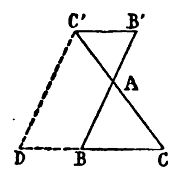


Fig. 137.

angles égaux chacun à chacun, puisqu'ils ont les côtés respectivement parallèles (ou coïncidants). On a en outre (155)
$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}.$$

Menons maintenant par C' la parallèle à AB qui coupe BC en D ; le triangle CAB coupé par C'D parallèle au côté AB donne (155)
$$\frac{AC'}{AC}=\frac{BD}{BC}.$$

Mais les lignes BD et B'C' sont égales comme parallèles comprises entre parallèles, et l'égalité précédente s'écrit :
$$\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC};$$

cette égalité, réunie à celle qui a été obtenue d'abord, donne
$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC};$$

les deux triangles AB'C', ABC ont donc leurs côtés proportionnels, et, comme ils ont les angles égaux, ils sont semblables, c. q. f. d.

163. — Si deux triangles sont semblables, ils ont leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels; les trois théorèmes qui suivent, connus sous le nom de *cas de similitude des triangles*, vont nous montrer qu'il suffit que certaines de ces conditions convenablement choisies soient remplies, pour que les deux triangles soient semblables.

Théorème VI

Deux triangles ABC, A'B'C' sont semblables s'ils ont les angles égaux chacun à chacun (*fig.* 138).

Supposons que l'on ait $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$. (Il suffit d'ailleurs, comme l'on sait, que les triangles aient deux angles égaux chacun à chacun, pour que leurs troisièmes angles soient aussi égaux.)

Prenons sur la demi-droite AB une longueur AD égale

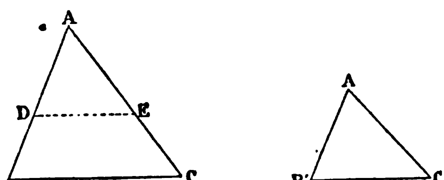


Fig. 138.

à A'B', et menons par D la parallèle à BC, qui coupe AC en E. Les deux triangles ADE, ABC sont semblables (**162**), et, si nous démontrons que les triangles A'B'C', ADE sont égaux, il en résultera clairement que le triangle A'B'C' est semblable au triangle ABC. Or, le triangle ADE a les angles égaux respectivement à ceux du triangle ABC (puisque ces deux triangles sont semblables) et, par suite, à ceux du triangle A'B'C' d'après l'hypothèse; en outre on

a $AD = A'B'$. Les deux triangles ADE, A'B'C' ont donc les angles égaux chacun à chacun et un côté égal, et, par suite, sont égaux, c. q. f. d.

164. Corollaires. — 1° *Deux triangles qui ont leurs côtés respectivement parallèles* ou *respectivement perpendiculaires sont semblables;* car ils ont leurs angles égaux chacun à chacun (**70**).

2° *Deux triangles rectangles qui ont un angle aigu égal sont semblables.*

Théorème VII

165. — Deux triangles ABC, A'B'C' sont semblables s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels (*fig.* 138).

Supposons que l'on ait :

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Prenons sur la demi-droite AB une longueur AD égale à A'B' et menons la parallèle DE à BC. Les deux triangles ADE, ABC sont semblables, et il suffit de démontrer l'égalité des triangles A'B'C', ADE. Or, la similitude des triangles ADE, ABC donne

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC};$$

puisque $AD = A'B'$, cette proportion s'écrit :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AE}{AC};$$

mais on a par hypothèse :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC};$$

on en déduit :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{A'C'}{AC} \text{ ou } AE = A'C'.$$

Les deux triangles A'B'C', ADE ont alors un angle égal ($\hat{A} = \hat{A}'$ par hypothèse) compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ($AD = A'B'$, $AE = A'C'$), et par suite sont égaux, c. q. f. d.

Théorème VIII

166. — Deux triangles ABC, A'B'C' sont semblables s'ils ont leurs trois côtés proportionnels (*fig.* 138).

Supposons que l'on ait :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Prenons sur la demi-droite AB une longueur AD égale à A'B' et menons la parallèle DE à BC. Les deux triangles ADE, ABC sont semblables, et il suffit de démontrer l'égalité des triangles A'B'C', ADE.

Or, la similitude des triangles ADE, ABC donne :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC};$$

puisque $AD = A'B'$, ces proportions s'écrivent :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC};$$

comparant ces égalités à celles que donne l'hypothèse, on obtient :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{A'C'}{AC} \text{ ou } AE = A'C';$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{B'C'}{BC} \text{ ou } DE = B'C'.$$

Les deux triangles A'B'C', ADE ont alors les trois côtés égaux chacun à chacun, et, par suite, sont égaux, c. q. f. d.

Théorème IX

167. — Trois droites, AA', BB', CC', qui concourent en un point O interceptent sur deux droites paral-

lèles ABC, A'B'C' quelconques des segments proportionnels (*fig.* 139 et 140).

En d'autres termes, on a la proportion :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

La démonstration qui suit s'applique aux deux cas de figure possible.

Les triangles semblables OAB, OA'B' (162) donnent :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'};$$

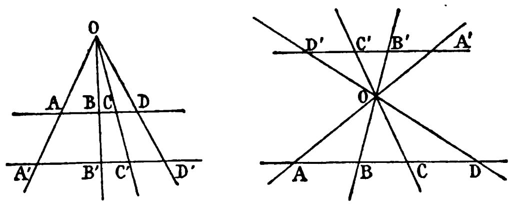


Fig. 139. Fig. 140.

les triangles semblables OBC, OB'C' donnent de même :

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{OB}{OB'};$$

on déduit de ces deux égalités :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'};$$

ou en intervertissant les moyens :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'},\ \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — Si l'on considérait une nouvelle droite DD' passant par le point O, il est clair que l'on pourrait écrire la suite de rapports égaux :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{OD}{OD'}.$$

168. — Réciproquement, *si* AA′ *et* BB′ *se coupent en un point* O, *et si les trois droites* AA′, BB′, CC′ *déterminent sur les deux parallèles* AB, A′B′ *des segments proportionnels additifs ou soustractifs en même temps, la droite* CC′ *passe par le point* O.

Si, en effet, OC coupe A′B′ en C″, les deux points C′ et C″ divisant le segment A′B′ en segments de même nature et de même rapport, coïncident nécessairement.

Théorème X

169. — Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés sont semblables.

Soient les deux polygones ABCDEF, A′B′C′D′E′F′ composés, l'un des triangles ABC, CAD, DAF, FED, l'autre des triangles A′B′C′, C′A′D′, D′A′F′, F′E′D′ respectivement semblables aux précédents et semblablement disposés (*fig.* 141).

1° Les angles correspondants des deux polygones sont égaux. Démontrons, par exemple, que l'on a $\widehat{BAF} = \widehat{B'A'F'}$; en effet, l'angle $\widehat{BAF}$ est la somme des angles BAC, CAD, DAF, et l'angle B′A′F′ est la somme des angles B′A′C′, C′A′D′, D′A′F′, respectivement égaux aux précédents comme angles homologues de triangles semblables. De même les angles B et B′ sont égaux comme angles homologues de deux triangles semblables, et ainsi de suite.

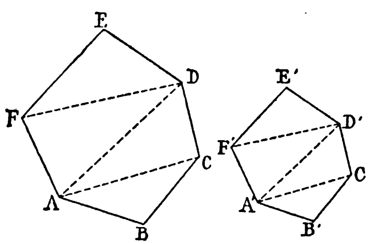


Fig. 141.

2° Les côtés correspondants des deux polygones sont proportionnels.

En effet, les triangles semblables dont sont composés les deux polygones, donnent successivement :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'},$$

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'},$$

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AF}{A'F'}=\frac{DF}{D'F'},$$

$$\frac{DF}{D'F'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EF}{E'F'}.$$

Il est clair qu'en comparant ces égalités, on obtient la suite de rapports égaux :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AF}{A'F'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EF}{E'F'},$$

et que par suite les côtés correspondants des deux polygones sont proportionnels.

Les deux polygones ayant leurs angles égaux, et les côtés homologues proportionnels, sont semblables.

Remarque. — Ce théorème prouve l'existence des polygones semblables.

Théorème XI

170. — Réciproquement, **deux polygones semblables peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés.**

Soient ABCDEF, A'B'C'D'E'F' les deux polygones semblables donnés (*fig.* 141). Menons dans le premier les diagonales AC, AD, DF qui le décomposent en triangles ABC, CAD, DAF, FED ; et menons dans le second les diagonales correspondantes A'C', A'D', D'F' qui le décomposent en triangles A'B'C', C'A'D', D'A'F', F'D'E'.

Nous allons montrer que ces triangles qui sont placés de la même façon que les premiers, leur sont respectivement semblables.

La similitude des deux polygones nous donne d'abord :

$$\hat{B} = \hat{B}', \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'};$$

donc les deux triangles ABC, A'B'C' sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels (**165**).

On en déduit :

$$A\hat{C}B = A'\hat{C}'B' \text{ et } \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'};$$

d'ailleurs la similitude des deux polygones nous donne :

$$B\hat{C}D = B'\hat{C}'D' \text{ et } \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'};$$

il en résulte que l'angle ACD, différence des deux angles BCD et ACB est égal à l'angle A'C'D', différence des deux angles B'C'D' et A'C'B' respectivement égaux aux précédents; en outre on a $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$. Par suite, les deux triangles ACD, A'C'D' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels.

On en déduit :

$$C\hat{A}D = C'\hat{A}'D', \quad \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'};$$

d'ailleurs la similitude des deux polygones et celle des triangles ABC, A'B'C' nous donne :

$$B\hat{A}F = B'\hat{A}'F', \quad B\hat{A}C = B'\hat{A}'C', \quad \frac{CD}{C'D'} = \frac{AF}{A'F'};$$

il en résulte que l'angle DAF, différence entre l'angle BAF et la somme des angles BAC, CAD est égal à l'angle D'A'F', différence entre l'angle B'A'F', égal à l'angle BAF, et la sommes de angles B'A'C', C'A'D' respectivement égaux aux angles BAC, CAD; en outre on a $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AF}{A'F'}$. Par suite

les deux triangles ADF, A'D'F' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels.

La similitude des triangles DEF, D'E'F' pourrait se déduire de ce qui précède par un raisonnement analogue à celui que nous avons déjà fait deux fois : il est plus simple de remarquer que ces triangles sont semblables comme ayant, en vertu de la similitude des deux polygones, un angle égal ($\hat{E} = \hat{E}'$) compris entre deux côtés proportionnels

$$\frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'}.$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Remarque. — Le rapport de similitude de deux triangles correspondants dans les deux séries de triangles semblables que nous venons de considérer est égal au rapport de similitude des deux polygones.

Théorème XII

171. — Le rapport des périmètres de deux polygones semblables ABCDEF, A'B'C'D'E'F' est égal à leur rapport de similitude (*fig.* 141).

On a, par hypothèse, la suite de rapports égaux :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FA}{F'A'}.$$

D'après un théorème d'arithmétique qui est encore applicable ici (**111**), chacun des rapports précédents est égal au rapport :

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EF + FA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'A'}$$

de la somme de leurs premiers termes à la somme de leurs seconds termes; or, ce rapport est précisément celui des périmètres des deux polygones, et par suite le théorème est démontré.

EXERCICES

1. — Deux pentagones ABCDE, A'B'C'D'E' sont semblables; les côtés du premier sont AB = 28^m, BC = 27^m, CD = 26^m, DE = 29^m, EF = 30^m. Dans le second, le côté A'B' homologue de AB a une longueur de 8^m ; quelles sont les longueurs des autres côtés ?

Rép. — B'C' = 7^m,71... ; C'D' = 7^m,42... ; D'E' = 8^m,28... ; EF' = 8^m,57...

2. — Deux polygones sont semblables ; deux côtés homologues de ces deux polygones ont des longueurs de 27^m,35 et 59^m,80 ; le périmètre du premier est 390^m,75. Quel est le périmètre du second ?

Réponse. — 854^m,36...

3. — On mène une parallèle variable B'C' à un côté d'un triangle ABC qui coupe AB en B' et AC en C'. Le lieu géométrique du milieu de B'C' est la médiane du triangle issue du sommet A; il en est de même du lieu géométrique du point d'intersection des droites BC' et B'C.

4. — La droite qui joint les milieux des deux bases d'un trapèze passe par le point de rencontre des diagonales et par le point de rencontre des côtés opposés aux parallèles.

5. — Dans deux triangles semblables ABC, A'B'C' on mène les hauteurs AD, A'D' issues des sommets homologues A et A' : les triangles ABD, A'B'D' sont semblables, ainsi que les triangles ACD, A'C'D'. Il en est de même si AD et A'D' sont les médianes, ou les bissectrices intérieures ou extérieures issues des sommets A et A'.

6. — Si D et D' sont deux points qui divisent les côtés homologues BC, B'C' de deux triangles semblables ABC, A'B'C' en segments proportionnels de même nature, les triangles ABD, A'B'D' sont semblables, ainsi que les triangles ACD, A'C'D'.

7. — Soient deux polygones semblables P et P' et deux points M et M' appartenant l'un à P, l'autre à P'. Ces deux points sont dits homologues si, étant situés sur deux côtés homologues AB, A'B' des deux polygones, ils divisent ces côtés en segments proportionnels de même nature, ou bien si, n'étant pas situés sur les deux côtés homologues AB, A'B', les triangles MAB, M'A'B' sont semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polygones. Si M, M' et N, N' sont deux couples de points homologues, les droites MN, M'N' sont dites homologues. Démontrer :

1° Que si D, D' et D_1, D_1' sont deux couples de droites homologues, le point d'intersection de D et D_1 est l'homologue du point d'intersection de D' et D_1' ;

2° Que si M, M' et N, N' sont deux couples de points homo-

logues, le rapport des deux segments homologues MN, M'N' est égal au rapport de similitude des deux polygones ;

3° Que si L et L', M et M', N et N' sont trois couples de points homologues, les deux triangles LMN, L'M'N' sont semblables, leur rapport de similitude étant celui des deux polygones.

8. — Dans deux triangles semblables, les hauteurs issues de deux sommets homologues sont homologues ; il en est de même des médianes et des bissectrices intérieures ou extérieures. Dans les deux triangles, les points de rencontre des médianes, les points de rencontre des hauteurs, les centres des cercles circonscrits, ou inscrits, ou exinscrits dans des angles homologues sont homologues.

9. — Dans un triangle ABC, la droite qui joint les milieux B', C' de deux côtés AC, AB est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié ; les trois médianes se coupent en un même point situé sur chacune d'elles au tiers de sa longueur à partir de la base correspondante.

10. — Soient A', B', C' les milieux des trois côtés BC, AC, AB d'un triangle ABC. Le triangle A'B'C' est semblable au triangle ABC, et leur rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. Etudier les lignes homologues de ces deux triangles. En déduire que si O est le centre du cercle circonscrit à ABC, G le point de concours des médianes, et H le point de concours des hauteurs de ABC, les trois points O, G, H sont en ligne droite, G étant entre les deux autres, et que l'on a $GH = 2GO$.

Le cercle circonscrit à A'B'C' a son centre au milieu de OH et passe par les pieds des hauteurs de ABC, et les milieux des segments AH, BH, CH : c'est le cercle des neuf points du triangle ABC.

Les distances du point O aux trois côtés du triangle sont respectivement moitiés des segments AH, BH, CH.

11. — Soient I, I', I'', I''' les centres des cercles inscrits et exinscrits à un triangle ABC; le cercle circonscrit au triangle passe par les milieux des droites qui joignent ces points deux à deux; ces milieux sont d'ailleurs les milieux des arcs du cercle circonscrit sous-tendus par les trois côtés du triangle.

12. — Dans un trapèze de bases AB, CD on mène une parallèle aux bases qui coupe AD en M et BC en N; démontrer la relation

$$\frac{AB}{MN} \times \frac{MD}{AD} + \frac{CD}{MN} \times \frac{AM}{AD} = 1.$$

13. — Une droite coupe les côtés BC, AC, AB d'un triangle en trois points A', B', C'; démontrer la relation

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

(On mènera par C une parallèle à AB et l'on comparera les triangles semblables ainsi formés.)

14. — Trois points A', B', C' étant pris sur les côtés BC, AC, AB d'un triangle tels que les droites AA', BB', CC' soient concourantes, démontrer la relation

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

(On appliquera la proposition précédente aux triangles ABA', ACA' coupés respectivement par CC' et BB'.)

15. — Trois points A', B', C' étant pris sur les côtés BC, AC, AB d'un triangle ABC tels que l'on ait la relation

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

ces trois points sont en ligne droite, ou bien les trois droites AA', BB', CC' sont concourantes suivant que parmi ces trois points il y en a un nombre pair ou un nombre impair sur les côtés eux-mêmes du triangle.

(Application aux médianes, aux hauteurs, aux bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle.)

16. — Soit ABCD un quadrilatère convexe, E le point de rencontre des côtés opposés AB, CD et F le point de rencontre des côtés opposés AD, BC. Le segment EF est divisé en segments proportionnels PE, PF d'une part, QE, QF d'autre part par les deux droites AC, BD.

Proposition analogue pour les segments AC, BD. (On appliquera les propositions des exercices 13 et 14 au triangle AEF coupé par BD d'une part, et par les droites concourantes CA, CE, CF d'autre part.)

En déduire une construction du second des deux points qui divisent un segment dans un rapport donné, quand on connaît le premier de ces points.

17. — On donne un angle A et un point fixe P; par P passe une sécante variable coupant les côtés de l'angle en B et C; sur cette sécante on prend le point Q tel que $\frac{QB}{QC} = \frac{PB}{PC}$. Quel est le lieu géométrique du point Q?

18. — Les données précédentes étant conservées, soit PB'C' une seconde sécante variable; quel est le lieu géométrique du point d'intersection des droites BC' et B'C lorsque les deux sécantes PBC, PB'C' varient?

19. — Gardant les notations de l'exercice 16, les milieux des trois segments AC, BD, EF sont en ligne droite. (On appliquera la proposition de l'exercice 15 au triangle formé en joignant les milieux du triangle BCE, et le résultat obtenu sera comparé

à celui qu'on obtient en appliquant l'exercice 13 à ce triangle BCE coupé par FAD.)

20. — Soit un segment AB divisé dans le même rapport par les deux points C, D; joignons les quatre points A, B, C, D à un point quelconque M du plan; une parallèle à MA menée par B est coupée en parties égales par MC et MD. — Réciproque.

21. — Gardant les données précédentes, montrer que si MC et MD sont perpendiculaires, ce sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle AMB.

22. — Gardant les données précédentes, montrer que si une droite quelconque coupe les droites MA, MB, MC, MD en A′, B′, C′, D′ les deux points C et D divisent le segment A′B′ dans le même rapport.

23. — On donne une droite D et un point fixe P; on joint P à un point quelconque A de D, et on prend sur PA un point Q tel que ce rapport $\frac{PQ}{PA}$ ait une valeur constante donnée. Quel est le lieu géométrique du point Q?

24. — Même question en remplaçant la droite D par une circonférence O.

25. — Quel est le lieu géométrique des points d'où l'on voit deux circonférences données sous le même angle?

26. — Quel est le lieu géométrique des points dont les distances à deux droites données sont dans un rapport donné?

§ 3. — Les lignes proportionnelles dans le cercle.

172. — Supposons qu'entre quatre lignes existe la proportion : $$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'};$$
soient a, a', b, b' les nombres qui mesurent ces quatre lignes *rapportées à une même unité;* on a la proportion arithmétique : $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},$$
d'où l'on déduit $$ab'=a'b,$$
ce que nous pouvons énoncer ainsi : Le produit des nombres qui mesurent les deux lignes extrêmes A et B′ est égal au produit des nombres qui mesurent les deux lignes moyennes A′ et B.

On abrège le langage en disant que le produit des deux lignes A et B′ est égal au produit des deux lignes A′ et B, et l'on écrit :

$$A \times B' = A' \times B.$$

Cet énoncé et cette formule n'ont un sens qu'à la condition d'entendre qu'il s'agit en réalité des nombres qui mesurent les lignes A, A′, B, B′, et non de ces lignes elles-mêmes.

Si les lignes A′ et B sont égales, de sorte que B soit moyenne proportionnelle entre A et B′, on écrit de même :

$$A \times B' = B^2$$

et l'on dit que le carré de la ligne B est égal au produit des lignes A et B′.

173. — Avant d'aller plus loin, nous démontrerons un lemme dont nous aurons souvent l'occasion de faire usage, soit dans ce paragraphe, soit dans les suivants.

Lemme

1° Le carré de la somme de deux lignes est égal à la somme des carrés de ces deux lignes augmentée du double produit de ces deux lignes.

2° Le carré de la différence de deux lignes est égal à la somme des carrés de ces deux lignes diminuée du double produit de ces deux lignes.

3° Le produit de la somme de deux lignes par leur différence est égal à la différence des carrés de ces deux lignes.

1° Soit à former le carré de la somme des deux lignes A et B, c'est-à-dire le produit $(A+B)\times(A+B)$. Il s'agit en réalité de nombres : or, pour multiplier une somme par une somme, on multiplie la première par chacun des termes de la seconde, et on fait la somme des résultats obtenus. On a donc d'abord :

$$(A+B)^2 = (A+B)\times A + (A+B)\times B.$$

Pour multiplier une somme par un nombre, on multi-

plie chacun des termes de cette somme par ce nombre, et on fait la somme des résultats obtenus; on a donc en second lieu :

$$(A+B)\times A=A^2+AB$$
$$(A+B)\times B=AB+B^2.$$

Réunissant ces deux résultats, il vient :

$$\begin{aligned}(A+B)^2&=(A^2+AB)+(AB+B^2)\\&A^2+AB+AB+B^2\\&A^2+2AB+B^2\end{aligned}\quad\text{, c. q. f. d.}$$

2° Formons $(A-B)^2$, c'est-à-dire $(A-B)\times(A-B)$. Pour multiplier une différence par une différence, on multiplie la première par chacun des termes de la seconde, et on fait la différence des résultats obtenus. On a donc d'abord :

$$(A-B)^2=(A-B)\times A-(A-B)\times B.$$

Pour multiplier une différence par un nombre, on multiplie chacun des termes de cette différence par ce nombre, et on fait la différence des résultats obtenus; on a donc en second lieu :

$$(A-B)\times A=A^2-AB$$
$$(A-B)\times B=AB-B^2.$$

Réunissant ces deux résultats, il vient :

$$(A-B)^2=(A^2-AB)-(AB-B^2).$$

Or, pour retrancher une différence, on retranche son premier terme et on ajoute le second, de sorte que nous avons finalement :

$$\begin{aligned}(A-B)^2&=A^2-AB-AB+B^2\\&=A^2-2AB+B^2\end{aligned}\quad\text{, c. q. f. d.}$$

3° Formons $(A+B)\times(A-B)$; raisonnant comme plus haut, on a d'abord :

$$(A+B)\times(A-B)=(A+B)\times A-(A+B)\times B,$$

puis :
$$(A+B)\times A = A^2 + AB$$
$$(A+B)\times B = AB + B^2,$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= (A^2+AB)-(AB+B^2)\\ &= A^2+AB-AB-B^2\\ &= A^2-B^2 \qquad , \text{c. q. f. d.}\end{aligned}$$

Théorème XIII

174. — Par un point P pris dans le plan d'une circonférence O, soient menées deux droites qui coupent cette circonférence en A et B, C et D; le produit des segments PA et PB est égal au produit des segments PC et PD (*fig.* 142 et 143).

La démonstration qui suit s'applique aux deux cas de figure possibles suivant que le point P est intérieur ou extérieur à la circonférence.

Menons les cordes BC et AD; les deux triangles PAD, PBC sont semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun (163), savoir : les angles APD, BPC égaux comme opposés par le sommet ou comme coïncidants suivant le cas de figure considéré, et les angles BAD, BCD égaux comme angles inscrits ayant tous deux pour mesure la moitié de l'arc BD. Les côtés homologues étant ceux qui sont opposés aux angles égaux, on a la proportion :

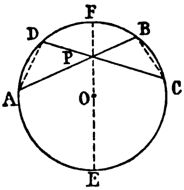


Fig. 142.

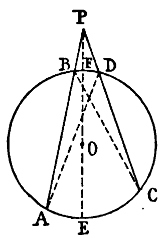


Fig. 143.

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB},$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$PA \times PB = PC \times PD, \text{ c. q. f. d.}$$

175. — Le produit $PA \times PB$ reste constant, d'après le théorème précédent, lorsque la droite PAB tourne autour du point P. Il est facile de calculer sa valeur quand on connaît le rayon R de la circonférence et la distance PO du point P au centre. Menons, en effet, le diamètre PO qui coupe la circonférence en E et F. D'après le théorème, on a :

$$PA \times PB = PE \times PF;$$

or 1° si P est intérieur au cercle (*fig.* 142), on a :

$$PE = R + OP, \quad PF = R - OP$$

et par suite :

$$PA \times PB = PE \times PF = (R + OP) \times (R - OP)$$
$$= R^2 - \overline{OP}^2 \text{ (173)}.$$

2° Si P est extérieur au cercle, on a :

$$PE = OP + R, \quad PF = OP - R,$$

et par suite :

$$PA \times PB = PE \times PF = (OP + R) \times (OP - R)$$
$$= \overline{OP}^2 - R^2 \text{ (173)}.$$

176. — Réciproquement, *si deux droites* AB, CD *se coupent en un point* P *tel que les segments* PA, PB *d'une part et* PC, PD *d'autre part soient en même temps additifs ou soustractifs, et si l'on a* $PA \times PB = PC \times PD$, *les quatre points* A, B, C, D *sont sur une même circonférence.*

En effet, les deux triangles PBC, PAD ont les angles en P égaux, soit comme coïncidants, soit comme opposés par le sommet, d'après la disposition des points donnés; en outre, de l'égalité $PA \times PB = PC \times PD$, on déduit :

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB},$$

de sorte que les deux triangles PAD, PBC sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés

proportionnels (165); par suite, les angles BAD, BCD opposés aux côtés homologues PD, PB sont égaux, d'où l'on conclut que le quadrilatère ABCD est inscriptible (**127**).

Théorème XIV

177. — Si d'un point P extérieur à une circonférence, on mène une tangente PA qui touche en A cette circonférence, et une sécante qui la coupe en B et C, la ligne PA est moyenne proportionnelle entre les lignes PB et PC (*fig.* 144).

En d'autres termes, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure, et l'on a l'égalité

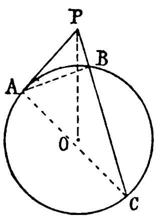


Fig. 144.

$$\overline{PA}^2 = PB \times PC.$$

Les deux triangles PAB, PAC sont semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun (**163**), savoir : l'angle en P commun, les angles PAB, PCA égaux comme ayant tous deux par mesure la moitié de l'arc AB compris entre leurs côtés (**120**, **121**). Par suite, on a la proportion

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC},$$

d'où l'on déduit :

$$\overline{PA}^2 = PB \times PC, \text{ c. q. f. d.}$$

Remarque. — Si R est le rayon de la circonférence, on a (**175**) :

$$\overline{PA}^2 = PB \times PC = \overline{OP}^2 - R^2.$$

178. — Réciproquement, *si sur un côté d'un angle* P *on prend un point* A, *et sur l'autre côté deux points* B *et* C *tels que* $\overline{PA}^2 = PB \times PC$, *la circonférence qui passe par ces trois points est tangente en* A *au côté* PA.

En effet, de l'égalité $\overline{PA}^2 = PB \times PC$, on tire $\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC}$ et par suite les deux triangles PAB, PAC sont semblables comme ayant un angle commun P compris entre deux côtés proportionnels (**165**); il en résulte que les angles PAB, PCA sont égaux, et par suite que la circonférence passant par les trois points A, B, C est tangente en A à PA, d'après la construction connue du segment capable d'un angle donné construit sur une droite donnée (**146**).

Exercices

1. — Dans un cercle O dont le rayon est 17 mètres, un point P est à une distance du centre égale à 8 mètres; quelle est la longueur de la corde menée par le point P perpendiculairement à PO?

Réponse. — 30 mètres.

2. — Dans un cercle O dont le rayon est $6^m,80$ on mène une corde dont la longueur est 12 mètres; quelle est la distance de cette corde au centre?

Réponse. — $3^m,20$.

3. — Dans un cercle, on a tracé une corde de 112 mètres à une distance du centre égale à 33 mètres; quel est le rayon du cercle?

Réponse. — 65 mètres.

4. — On donne un cercle de 24 mètres de rayon, et un point dont la distance au centre est 74 mètres; quelle est la longueur de la tangente menée de ce point au cercle?

Réponse. — 70 mètres.

5. — A un cercle de 28 mètres de rayon on mène une tangente dont la longueur est 96 mètres; quelle est la distance de l'extrémité de cette tangente au centre?

Réponse. — 100 mètres.

6. — Un point P est à une distance de $1^m,45$ du centre d'un cercle; la tangente menée de ce point au cercle a une longueur de $1^m,44$; quel est le rayon du cercle?

Réponse. — $0^m,17$.

7. — Un point P est à une distance de $13^m,60$ du centre d'un cercle de rayon $6^m,40$; par ce point on mène une sécante dont la partie extérieure est 8 mètres; quelle est la longueur de la corde interceptée sur cette sécante par le cercle?

Réponse. — 10 mètres.

Quelle est la distance de cette corde au centre?

Réponse. — $3^m,99...$.

8. — Sur cette corde on prend un point à une distance du point P égale à 10 mètres; quelle est la distance de ce point au centre?

Réponse. — $4^m,99...$.

9. — Si un segment AB est divisé dans le même rapport par les deux points C et D, et si O est le milieu de AB, on a $\overline{OA}^2 = OC \times OD$. En déduire que tout cercle passant par les points C et D est coupé sous un angle droit par le cercle décrit sur AB comme diamètre. — Réciproque.

10. — Soient deux circonférences O, O′ et OA, O′A′ deux rayons parallèles de même sens (ou de sens contraire); la droite AA′ rencontre OO′ en un point fixe S appelé centre de similitude externe (ou interne) et les circonférences O et O′ en B et B′. Démontrer que les produits $SA \times SB'$ et $SA' \times SB$ ont une même valeur fixe quand la droite AA′ varie.

11. — Les deux centres de similitude de deux circonférences O, O′ partagent le segment OO′ dans le rapport des rayons. En déduire que les trois centres de similitude externes de trois circonférences prises deux à deux sont en ligne droite; il en est de même de deux centres de similitude internes et d'un centre de similitude externe (Exercice 15, § 2). Qu'arrive-t-il si on considère les trois centres de similitude internes ou deux centres de similitude externes et un centre de similitude interne?

12. — Si une circonférence variable M touche deux circonférences données O et O′ en des points A, A′, la droite AA′ passe par l'un des centres de similitude S de O et O′, et le produit $SA \times SA'$ reste constant.

13. — Si une circonférence variable M touche une circonférence O et une droite D en des points A et B, la droite AB passe par l'une des extrémités S du diamètre du cercle O perpendiculaire à D, et le produit $SA \times SB$ reste constant.

14. — On donne une droite D et un point fixe P; on joint P à un point quelconque A de D et on prend sur PA un point Q, tel que le produit $PA \times PQ$ ait une valeur constante donnée. Quel est le lieu géométrique du point Q?

15. — Même question en remplaçant la droite D par une circonférence O. Cas où le point P est sur la circonférence.

16. — Soit une circonférence O et une sécante variable passant par un point fixe P et coupant la circonférence en A et B; si A′ et B′ sont les symétriques de A et B par rapport au diamètre OP coupant la circonférence en C et D, les droites AB′ et BA′ se coupent en un point de ce diamètre qui divise CD dans le même rapport que le point P.

17. — Gardant les données précédentes, soit Q le point qui divise la corde AB dans le même rapport que le point P et M le

milieu de AB; démontrer que le produit PM $\times$ PQ est égal au produit constant PA $\times$ PB.

18. — Gardant les données précédentes, quel est le lieu géométrique du point Q? Le trouver directement et le déduire aussi de celui de M en utilisant la propriété précédente et l'exercice 15. — Le lieu passe par les points de contact des tangentes menées de P à la circonférence, quand ces tangentes existent.

19. — Gardant les données précédentes et supposant le point P extérieur à la circonférence, les tangentes en A et B se coupent en un point R dont le lieu géométrique coïncide avec celui de Q.

20. — Gardant les données précédentes, soit PA'B' une seconde sécante variable passant par P; les droites AA' et BB' se coupent en un point S; les droites AB' et BA' se coupent en un point T. Le lieu géométrique des points S et T coïncide avec celui des points Q et R.

§ 4. — Les relations métriques entre les différentes lignes d'un triangle.

179. — On appelle *projection* d'un point A sur une droite indéfinie X'X le pied A' de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite (*fig.* 145).

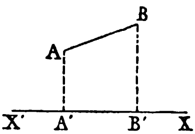


Fig. 145.

On appelle *projection* d'un segment AB sur une droite indéfinie X'X le segment A'B' qui a pour extrémités les projections des extrémités du segment donné sur la droite donnée.

Théorème XV

180. — Si du sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, on abaisse AD perpendiculaire sur l'hypoténuse BC :

1° La perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segments BD, CD qu'elle détermine sur l'hypoténuse;

2° Chaque côté de l'angle droit est moyen propor-

tionnel entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse (*fig.* 146).

Les triangles ABD et ACD sont tous deux semblables au triangle ABC comme triangles rectangles ayant un angle aigu commun (164), et par suite sont semblables entre eux ; pour plus de clarté, les angles aigus égaux sont marqués sur la figure par un même signe.

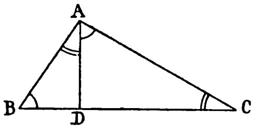


Fig. 146.

1° La similitude des triangles ABD, ACD donne, en écrivant que les côtés opposés aux angles aigus égaux sont proportionnels :

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD},$$

d'où l'on tire :

$$\overline{AD}^2=BD\times CD;$$

AD est donc moyenne proportionnelle entre BD et CD, c. q. f. d.

2° La similitude des triangles ABC, ABD donne de même :

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD},$$

d'où l'on tire :

$$\overline{AB}^2=BC\times BD;$$

AB est donc moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse BC et sa projection BD sur l'hypoténuse, c. q. f. d.

On raisonnerait de même pour le côté AC.

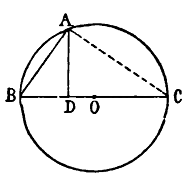


Fig. 147.

181. Corollaires. — 1° *La perpendiculaire* AD *abaissée d'un point* A *d'une circonférence sur un diamètre quelconque* BC *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD, CD *qu'elle détermine sur ce diamètre* (*fig.* 147). Car le triangle ABC est rectangle en A (122).

2° *Une corde* AB *d'une circonférence est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *qui passe par une de ses extrémités* B *et sa projection* BD *sur ce diamètre* (*fig.* 147).

Car le triangle ABC est rectangle en A.

Théorème XVI

182. — Le carré de l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit (*fig.* 146).

En effet, d'après le théorème précédent, on a :

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD$$
$$\overline{AC}^2 = BC \times CD;$$

ajoutons ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times BD + BC \times CD$$
$$= (BD + CD) \times BC.$$

Or $BD + CD = BC$; donc :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times BC = \overline{BC}^2, \text{ c. q. f. d.}$$

183. — Les théorèmes qui précèdent permettent, lorsque l'on connaît deux des six lignes BC, AC, AB, BD, CD, AD d'un triangle rectangle, de calculer les quatre autres ; faisant en effet $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = b'$, $CD = c'$, $AD = h$, on a les égalités :

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b^2 = ac'$$
$$c^2 = ab'$$
$$h^2 = b'c'$$

que l'on peut ensuite combiner de bien des façons différentes.

Exemple. — 1° Soient $b = 4$, $c = 3$ (l'unité restant arbitraire), on aura :

$$a^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25, \text{ d'où } a = 5;$$

$$b' = \frac{c^2}{a} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8; \quad c' = \frac{b^2}{a} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2;$$

$$h^2 = b'c' = 1{,}8 \times 3{,}2 = 5{,}76, \text{ d'où } h = 2{,}4.$$

On peut d'ailleurs remarquer que, à cause des valeurs de b' et de c', on a :

$$h^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{b^2}{a} = \frac{b^2c^2}{a^2}, \text{ d'où } h = \frac{bc}{a}.$$

2° Soient $a = 13$, $c = 5$; on aura :

$$b^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144, \text{ d'où } b = 12;$$

$$b' = \frac{25}{13}, \; c' = \frac{144}{13}, \; h = \frac{60}{13}.$$

3° Soit $b = c$, c'est-à-dire que le triangle rectangle est isocèle, comme ceux qui sont déterminés dans un carré par une diagonale. On aura :

$$a^2 = 2b^2, \text{ d'où } a = b\sqrt{2}$$

$$h = b' = c' = \frac{b^2}{b\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

4° Soit $a = 2c$, c'est-à-dire que le triangle rectangle a son hypoténuse double de l'un des côtés de l'angle droit, comme ceux qui sont déterminés dans un triangle équilatéral par une hauteur. On aura :

$$b^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \left(\text{puisque } c = \frac{a}{2}\right), \text{ d'où } b^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{et } b = \frac{a}{2}\sqrt{3};$$

$$b' = \frac{a}{4}, \; c' = \frac{3a}{4}, \; h = \frac{a}{4}\sqrt{3}.$$

Théorème XVII

184. — Le carré d'un côté AC d'un triangle ABC opposé à un angle aigu B, est égal à la somme des

carrés des deux autres côtés, diminuée du double produit de l'un de ces côtés, BC, par la projection BD de l'autre sur lui (*fig.* 148 et 149).

La démonstration suivante s'applique dans les deux cas de figure possible, suivant que D est sur le segment BC lui-même ou sur son prolongement.

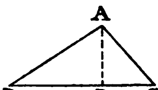


Fig. 148.

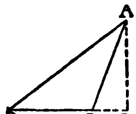


Fig. 149.

Le triangle rectangle ACD nous donne :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2;$$

le triangle rectangle ABD donne aussi :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2;$$

d'autre part CD est égale à la différence BC — BD ou à la différence BD — BC suivant le cas dans lequel on se trouve; donc dans tous les cas, on aura (**173**) :

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD.$$

Ajoutant les valeurs de $\overline{AD}^2$ et de $\overline{CD}^2$, et supprimant les termes $+\overline{BD}^2$ et $-\overline{BD}^2$ qui se détruisent, il vient finalement :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — On voit aisément que le théorème subsiste si l'angle C que nous avons supposé aigu ou obtus devient droit.

Théorème XVIII

185. — Le carré d'un côté AC d'un triangle ABC opposé à un angle obtus B est égal à la somme des

carrés des deux autres côtés, augmentée du double produit de l'un de ces côtés, BC, par la projection BD de l'autre sur lui (*fig.* 150).

Le triangle rectangle ACD donne :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 ;$$

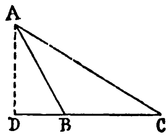


Fig. 150.

le triangle rectangle ABD donne aussi :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 ;$$

d'autre part CD est égale à la somme

$$BC + BD,$$

de sorte que (**173**) :

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times BD.$$

Ajoutant les valeurs de $\overline{AD}^2$ et de $\overline{CD}^2$, et supprimant les termes $+\overline{BD}^2$ et $-\overline{BD}^2$ qui se détruisent, il vient finalement :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times BD, \text{ c. q. f. d.}$$

186. — Les deux théorèmes précédents et le théorème du n° 182 nous montrent que : *dans un triangle, le carré d'un côté est supérieur, égal ou inférieur à la somme des carrés des deux autres côtés, suivant que l'angle opposé est obtus, droit ou aigu.*

Les réciproques sont vraies (**39**).

187. — Les théorèmes précédents vont nous permettre de résoudre un grand nombre de questions relatives au triangle. Dans toutes ces questions, si ABC est le triangle, nous ferons $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, et en désignant par p le demi-périmètre, nous aurons :

$$a + b + c = 2p,$$

d'où l'on tire en retranchant $2a$ aux deux membres :

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a),$$

et de même :

$$a + c - b = 2(p - b)$$
$$a + b - c = 2(p - c).$$

Calculons d'abord les hauteurs h, h', h'' issues des sommets A, B, C en fonction des trois côtés du triangle. Il suffit de calculer $AD = h$ (*fig.* 151) : la formule obtenue donnera h' et h'' en modifiant convenablement les notations.

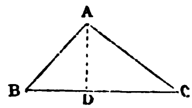


Fig. 151.

L'un des deux angles B et C est toujours aigu : supposons que ce soit l'angle B; on a d'abord dans le triangle rectangle ABD :

$$h^2 = c^2 - \overline{BD}^2,$$

ou d'après le lemme du n° **173** :

$$h^2 = (c + BD)(c - BD).$$

D'ailleurs on a (**184**) :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.BD,$$

d'où l'on tire

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

de sorte que :

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$
$$= \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}.$$

Usant encore du même lemme (**173**), on peut écrire :

$$h^2 = \frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{4a^2}$$
$$= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}.$$

Remplaçant les facteurs du numérateur par leurs expressions données plus haut, il vient :

$$h^2 = \frac{2p \times 2(p-b) \times 2(p-c) \times 2(p-a)}{4a^2}$$
$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2};$$

posant, pour abréger l'écriture :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

il vient finalement :

$$h=\frac{2S}{a}.$$

On aurait de même :

$$h'=\frac{2S}{b},\ h''=\frac{2S}{c}.$$

Les segments déterminés par chaque hauteur sur les côtés correspondants se calculeront facilement comme nous avons calculé BD plus haut.

Exemple. — Soient $a=15,\ b=14,\ c=13$;
ici $a+b+c=42$, d'où $p=21$, $p-a=6$, $p-b=7$,

$$p-c=8;$$

par suite

$$S=\sqrt{21\times6\times7\times8}=84.$$

Donc :

$$h=\frac{2\times84}{15}=\frac{56}{5}=11,2;$$

$$h'=\frac{2\times84}{14}=12;\quad h''=\frac{2\times84}{13}=\frac{168}{13}=12,92\ldots$$

Comme ensuite

$$a^2=225,\ b^2=196,\ c^2=169,$$

on aura (les trois angles du triangle étant aigus d'après le n° **186**), en appelant AD, BD′, CD″ les trois hauteurs :

$$BD=\frac{225+169-196}{2\times15}=6,6;\ CD=\frac{225+196-169}{2\times15}=8,4;$$

$$AD'=\frac{196+169-225}{2\times14}=5;\quad CD'=\frac{225+196-169}{2\times14}=9;$$

$$AD''=\frac{196+169-225}{2\times13}=\frac{70}{13}=5,38\ldots;$$

$$BD''=\frac{225+169-196}{2\times13}=\frac{99}{13}=7,61\ldots$$

188. — Cherchons maintenant une formule pour calculer le rayon R du cercle circonscrit à un triangle. Soit (*fig.* 152) AG le diamètre du cercle circonscrit qui passe par le sommet A, et AD la hauteur issue de ce sommet; les deux triangles ABG, ADC sont rectangles en B et D, puisque l'angle ABG est inscrit dans une demi-circonférence; en outre, ils ont les angles en G et en C égaux, comme inscrits dans un même

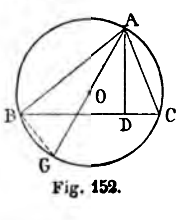


Fig. 152.

segment ACB; ils sont par suite semblables (**164**), et l'on a :

$$\frac{AG}{AC}=\frac{AB}{AD},$$

ou

$$AG \times AD = AB \times AC;$$

ce que nous écrivons avec les notations introduites plus haut :

$$2R \times h = bc,$$

d'où

$$R=\frac{bc}{2h};$$

comme l'on a $h=\frac{2S}{a}$, il vient finalement :

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

Exemple. — Gardant les données numériques employées plus haut, on a :

$$R=\frac{15 \times 14 \times 13}{4 \times 84}=\frac{65}{8}=8,125.$$

189. — Le théorème suivant nous donnera le moyen de calculer les trois médianes m, m', m'' issues des trois sommets A, B, C d'un triangle ABC.

Théorème XIX

La somme des carrés de deux côtés AB, AC d'un triangle est égale au double du carré de la médiane AM relative au troisième côté BC augmenté du double du carré de la moitié de ce troisième côté (*fig.* 153).

Des deux angles AMB, AMC, l'un est aigu et l'autre obtus; supposons l'angle AMB aigu et soit AD la hauteur issue de A.

Les théorèmes des nos **184** et **185** donnent :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2BM \times DM$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 + 2CM \times DM.$$

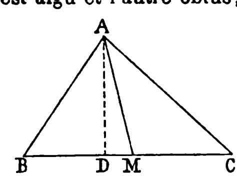


Fig. 153.

Ajoutant ces deux égalités membre à membre et remarquant que $CM = BM$, il vient :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{BM}^2, \text{ c. q. f. d.}$$

Remarque. — Le théorème subsiste si les deux angles en M sont droits.

En retranchant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtiendrait de même :

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 &= 4BM \times DM \\ &= 2BC \times DM,\end{aligned}$$

de sorte que l'on peut énoncer la proposition suivante :

La différence des carrés de deux côtés AC, AB *d'un triangle* ABC *est égale au double produit du troisième côté* BC *par la projection* DM *de la médiane correspondante sur ce même côté.*

190. — Si, comme nous l'avons dit, on fait $AM = m$, on peut écrire :

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

d'où l'on tire :

$$m = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}.$$

On aurait des formules analogues pour calculer m' et m''.

Exemple. — Gardant les données numériques employées plus haut, on a :

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(196+169)-225} = \frac{1}{2}\sqrt{505} = 11{,}23...$$

$$m' = \frac{1}{2}\sqrt{2(225+169)-196} = \sqrt{148} = 12{,}16...$$

$$m'' = \frac{1}{2}\sqrt{2(225+196)-169} = \frac{1}{2}\sqrt{673} = 12{,}97...$$

191. — On peut encore déduire des deux propositions qui précèdent les deux corollaires suivants, que le lecteur démontrera aisément :

1° *Le lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes* B *et* C *est constante et égale à* L^2 *est une circonférence ayant pour centre le milieu* M *de* BC *et pour rayon*

$$\sqrt{\frac{L^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}}.$$

2° *Le lieu géométrique des points* M *dont la différence des carrés des distances* $\overline{MB}^2$, $\overline{MC}^2$ *à deux points fixes* B *et* C *est constante et égale à* L^2 *est une droite perpendiculaire à* BC, *dont le pied est plus rapproché de* C *que de* B *et dont la distance au milieu* M *de* BC *est* $\frac{L^2}{2BC}$.

Exercices

N.-B. — Dans un triangle ABC, les côtés BC, CA, AB seront toujours désignés par a, b, c; le périmètre par $2p$ et la quantité auxiliaire $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ par S; les hauteurs AP, BQ, CR seront appelées h, h', h''; leur point de rencontre sera H; les médianes AL, BM, CN seront appelées m, m', m''; leur point de rencontre sera G; les bissectrices intérieures AD, BE, CF seront appelées f, f', f'', et les bissectrices extérieures AD′, BE′, CF′ seront g, g', g''; le centre du cercle inscrit sera I, et les centres des cercles exinscrits dans les angles A, B, C seront I′, I″, I‴; le centre du cercle circonscrit sera O, et son rayon R; les rayons du cercle inscrit et des cercles exinscrits seront r, r', r'', r'''; enfin les distances du centre O du cercle circonscrit aux côtés a, b, c seront δ, δ' δ''.
Si le triangle est rectangle, A sera toujours le sommet de l'angle droit et a désignera par suite l'hypoténuse.

1. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle, sachant que $AP = h = 6^m$, $BP = 5^m$.

Réponse. — $a = 12^m,2$; $b = 9^m,37...$; $c = 7^m,81...$

2. — Dans un triangle rectangle, calculer a et b, sachant que $c = 7^m$, $h = 4^m$.

Réponse. — $a = 8^m,52...$; $b = 4^m,87...$

3. — Dans un triangle rectangle, calculer a et b, sachant que $c = 7^m$, $BP = 3^m$.

Réponse. — $a = 16^m,33...$; $b = 14^m,75...$

4. — Dans un triangle rectangle, calculer b et c, sachant que $a = 49^m$, $BP = 9^m$.

Réponse. — $b = 44^m,27...$; $c = 21^m$.

5. — Calculer les hauteurs et les segments déterminés sur les côtés par les pieds des hauteurs dans un triangle, sachant que $a = 3^m,55$; $b = 3^m,23$; $c = 2^m,92$.

Réponse. — $h = 2^m,50...$; $h' = 2^m,74...$; $h'' = 3^m,04...$

$BP = 1^m,50...$ $CP = 2^m,04...$ $BR = 1^m,83...$ $AR = 1^m,08...$
$AQ = 0^m,98...$ $CQ = 2^m,24...$

6. — Dans le même triangle, calculer le rayon du cercle circonscrit.

Réponse. — $R = 1^m,88...$

7. — Dans le même triangle, calculer les médianes.

Réponse. — $m = 2^m,51\ldots$ $m' = 2^m,82\ldots$ $m'' = 3^m,06\ldots$

8. — Dans un triangle ABC, calculer les distances δ, δ', δ'' et les segments AH, BH, CH. — Application aux données précédentes.

(Le triangle OLB donne $\delta^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$; remplaçant R par sa valeur et $16S^2$ par l'expression identique :

$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

on trouve facilement :

$$\delta = \pm \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{8S} = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4h},$$

où l'on prendra le signe + ou le signe —, suivant que l'angle A est aigu ou obtus.

On trouve cette formule immédiatement, en remarquant d'abord que AH est double de δ, et ensuite que les quadrilatères inscriptibles CPHQ, BPHR donnent (**174**) :

$$AH \times h = AQ \times b = AR \times c = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

d'après la formule qui donne AQ ou AR.)

Réponse. —

$$\delta = \frac{AH}{2} = 0^m,63\ldots,\ \delta' = \frac{BH}{2} = 0^m,97\ldots,\ \delta'' = \frac{CH}{2} = 1^m,19\ldots$$

9. — Calculer les bissectrices intérieures ou extérieures d'un triangle. — Application aux données précédentes.

(Le triangle ABD donne :

$$f^2 = c^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times BP.$$

On connaît BD et BP, et après réduction on trouve :

$$f = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

On trouve de même pour les bissectrices extérieures :

$$g = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}.$$

en supposant $b > c$.)

Réponse. — $f = 2^m,50\ldots$; $f' = 2^m,78\ldots$; $f'' = 3^m,05\ldots$;
$g = 35^m,03\ldots$; $g' = 16^m,18\ldots$; $g'' = 30^m,71\ldots$

10. — Calculer les segments déterminés sur les bissectrices d'un triangle par les centres des cercles inscrit et exinscrits. — Application aux données précédentes.

(En appliquant le théorème de la bissectrice, on a immédiatement :

$$AI = \frac{fc}{c + BD} = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}};\ ID = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}};$$

$$AI' = \sqrt{\frac{bcp}{p-a}};\ I'D = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bcp}{p-a}};$$

$$AI'' = \sqrt{\frac{bc(p-c)}{p-b}};\ I''D' = \frac{a}{b-c}\sqrt{\frac{bc(p-c)}{p-b}};$$

$$AI''' = \sqrt{\frac{bc(p-b)}{p-c}};\ I'''D' = \frac{a}{b-c}\sqrt{\frac{bc(p-b)}{p-c}};\ \text{etc.})$$

Réponse. — $AI = 1^m,58\ldots$; $ID = 0^m,91\ldots$; $AI' = 5^m,93\ldots$; $I'D = 3^m,42\ldots$;

— $AI'' = 3^m,35\ldots$; $I''D' = 38^m,38\ldots$; $AI''' = 2^m,81\ldots$; $I'''D' = 32^m,21\ldots$;

— $BI = 1^m,86\ldots$; $IE = 0^m,92\ldots$; $BI'' = 5^m,57\ldots$; $I''E = 2^m,78\ldots$;

— $BI''' = 2^m,64\ldots$; $I'''E' = 13^m,54\ldots$; $BI' = 3^m,92\ldots$; $I'E' = 20^m,11\ldots$;

— $CI = 2^m,13\ldots$; $IF = 0^m,92\ldots$; $CI''' = 5^m,36\ldots$; $I'''F = 2^m,31\ldots$;

— $CI' = 3^m,77\ldots$; $I'F' = 34^m,48\ldots$; $CI'' = 3^m,03\ldots$; $I''F' = 27^m,68\ldots$

11. — Calculer les rayons des cercles inscrit et exinscrits à un triangle. — Application aux données précédentes.

(Si le cercle inscrit touche le côté AB en H on a :

$$r^2 = \overline{AI}^2 - \overline{AH}^2;$$

or, on sait que $AH = p - a$; on en déduit la valeur de r en se servant de la valeur de AI trouvée dans l'exercice précédent; on trouve :

$$r = \frac{S}{p},\ \text{et de même}\ r' = \frac{S}{p-a},\ r'' = \frac{S}{p-b},\ r''' = \frac{S}{p-c}.)$$

Réponse. — $r = 0^m,91\ldots$; $r' = 3^m,41\ldots$; $r'' = 2^m,74\ldots$; $r''' = 2^m,30\ldots$

12. — Démontrer en se servant des formules obtenues précédemment et vérifier les égalités :

$$r' + r'' + r''' = 4R + r$$
$$\delta = \pm \frac{r + r'' + r''' - r'}{4}.$$

(Dans la dernière formule on prend le signe + ou le signe —, suivant que l'angle A est aigu ou obtus.)

13. — Dans un triangle, calculer les distances du centre O du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrit et exinscrits. — Application aux données précédentes.

(On démontrera, soit directement, soit en employant les formules obtenues plus haut, et remarquant que l'on a :

$$\overline{IO}^2 = (r - \delta)^2 + \left(\frac{a}{2} - BK\right)^2,$$

K étant le point de contact du cercle I avec le côté BC, les résultats suivants :

$$\overline{IO}^2 = R^2 - 2Rr; \ \overline{I'O}^2 = R^2 + 2Rr'; \ \overline{I''O}^2 = R^2 + 2Rr'';$$
$$\overline{I'''O}^2 = R^2 + 2Rr'''.)$$

Réponse. —

$IO = 0^m,33\ldots$; $I'O = 4^m,04\ldots$; $I''O = 3^m,72\ldots$; $I'''O = 3^m,49\ldots$

14. — Dans un triangle rectangle on a :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

15. — Considérons un triangle rectangle ; le triangle qui a pour côtés $b + c$, h et $a + h$ est rectangle.

16. — Soient r_1 et r_2 les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABD, ACD déterminés dans un triangle rectangle par la hauteur AD de l'hypoténuse, on a :

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

17. — La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère quelconque est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.

18. — Dans un parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, et réciproquement.

19. — Dans un quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

20. — Dans un triangle ABC, on a :

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 3(\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2).$$

21. — Si M est un point quelconque du plan d'un triangle ABC, on a :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3\overline{MG}^2.$$

22. — Quel est le lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux trois sommets d'un triangle a une valeur constante donnée?

23. — Calculer les côtés d'un triangle, connaissant les trois médianes. Construire le triangle. Application aux données suivantes :

$$m = 5^{m},\ m' = 4^{m},\ m'' = 3^{m}.$$

Réponse. — $a = 3^{m},33...$ $b = 4^{m},80...$ $c = 5^{m},69...$

24. — La somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le produit des bases.

25. — Dans un trapèze, le rapport de la différence des carrés des diagonales à la différence des carrés des côtés non parallèles est égal au rapport de la somme des bases à leur différence.

26. — Calculer les diagonales d'un trapèze, connaissant les quatre côtés; construire le trapèze.

27. — Si un quadrilatère ABCD est inscrit dans une circonférence, le produit des distances d'un point quelconque M de cette ligne à deux côtés opposés du quadrilatère est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés.

28. — Soit ABCD un quadrilatère convexe; on construit vers l'intérieur du quadrilatère un triangle BCE tel que $\widehat{CBE} = \widehat{ABD}$ et $\widehat{BCE} = \widehat{ADB}$. Les triangles ABD, BCE sont semblables; montrer qu'il en est de même des triangles ABE, BCD et en déduire la relation :

$$AB \times CD + AC \times BD = BD\,(AE + EC).$$

29. — Déduire de la proposition précédente que le produit des diagonales d'un quadrilatère convexe est au plus égal à la somme des produits des côtés opposés. Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que le quadrilatère soit inscriptible.

30. — Dans un quadrilatère convexe inscriptible, le rapport des diagonales est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la première diagonale à la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la seconde. (Prenant un arc AD' égal à l'arc CD

et un arc DA′ égal à l'arc AB, on appliquera la proposition de l'exercice précédent aux quadrilatères CBAD′, BCDA′.)

31. — Calculer les diagonales d'un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés.

Application. — Les côtés successifs ont des longueurs de 60^m, 25^m, 39^m, 52^m.

Réponse. — Les longueurs des diagonales sont 56^m et 65^m.

32. — Le rayon du cercle circonscrit à un quadrilatère convexe inscriptible dont les côtés successifs sont *a*, *b*, *c*, *d* est donné par la formule :

$$R^2 = \frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{(b+c+d-a)\,(a+c+d-b)\,(a+b+d-c)\,(a+b+c-d)}.$$

(On calculera une diagonale, puis le rayon du cercle circonscrit au triangle ainsi formé.) — Application aux données précédentes.

Réponse. — $R = 32^m,50$.

33. — Etant données deux circonférences O et O′, quel est le lieu géométrique des points M extérieurs ou intérieurs à la fois aux deux circonférences, tels que si on mène par M une sécante quelconque coupant les circonférences respectivement en A et B, A′ et B′, les produits $MA \times MB$ et $MA' \times MB'$ soient égaux?

Le lieu est une ligne droite qui passe par les points communs aux deux circonférences.

34. — Si on considère les trois lignes droites lieux géométriques des points jouissant de la propriété énoncée dans l'exercice précédent par rapport à trois circonférences prises deux à deux, ces trois droites sont concourantes ou parallèles.

35. — Les cordes communes à un cercle donné et à tous les cercles que l'on peut mener par deux points donnés passent par un point fixe.

36. — Quel est le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener des tangentes égales à deux circonférences données?

37. — On dit que deux circonférences sont orthogonales lorsqu'elles se coupent sous un angle droit; démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que deux circonférences soient orthogonales est :

$$d^2 = R^2 + R'^2,$$

en appelant la distance des centres, R et R′ les rayons.

38. — Quel est le lieu géométrique des centres des circonférences orthogonales à deux circonférences données?

39. — Soit ABCD un quadrilatère convexe; E le point de rencontre des côtés opposés AB, CD; F le point de rencontre des côtés opposés AD, BC. Les points de concours des hauteurs

des quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère pris trois à trois sont sur une même ligne droite perpendiculaire à la droite qui joint les milieux des segments AC, BD, EF. (On fera voir que ces points appartiennent aux lieux géométriques définis dans l'exercice 33 relatifs aux trois circonférences décrites sur AC, BD, EF comme diamètres, prises deux à deux.)

§ 5. — Problèmes et constructions graphiques.

Problème I

192. — Partager une droite donnée L en parties proportionnelles à des droites données M, N, P, Q ou à des nombres donnés m, n, p, q.

Le deuxième cas se ramène immédiatement au premier : si, en effet, il faut partager L en parties proportionnelles aux nombres m, n, p, q, on prendra des longueurs M, N, P, Q mesurées avec une unité arbitraire par les nombres m, n, p, q et on sera ramené à partager L en parties proportionnelles à ces longueurs.

Soit AB la ligne donnée L (*fig.* 154). Par le point A menons une droite quelconque AX, et sur cette droite portons des longueurs consécutives AC, CD, DE, EF égales respectivement aux lignes données M, N, P, Q ;

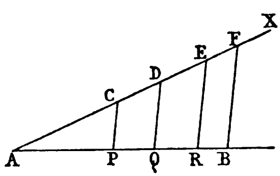


Fig. 154.

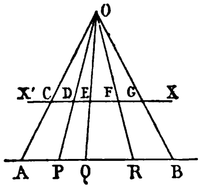


Fig. 155.

menons BF, et les parallèles CP, DQ, ER à BF qui coupent AB en P, Q, R. On a (156) :

$$\frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QR}{DE} = \frac{RB}{EF};$$

les segments AP, PQ, QR, RB répondent donc à la question.

On peut encore employer la construction suivante. Sur une parallèle quelconque X'X à AB (*fig.* 155), portons des longueurs consécutives CD, DE, EF, FG égales respectivement aux lignes données M, N, P, Q. Les droites AC et BG se coupent en O; les droites OD, OE, OF coupent AB en P, Q, R et l'on a (167) :

$$\frac{AP}{CD}=\frac{PQ}{DE}=\frac{QR}{EF}=\frac{RB}{FG};$$

les segments AP, PQ, QR, RB répondent donc à la question.

193. — Si en particulier on veut diviser une droite en un certain nombre de parties égales, quatre par exemple, on appliquera l'une quelconque de ces constructions, en supposant les lignes M, N, P, Q égales entre elles, leur longueur commune restant d'ailleurs arbitraire.

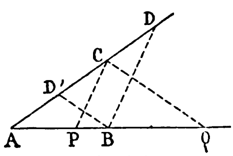


Fig. 156.

194. — Si l'on veut déterminer les deux points P et Q qui partagent le segment AB dans le rapport de deux lignes données M et N, on mènera par A une droite quelconque AX (*fig.* 156) sur laquelle on portera AC égale à M, puis de part et d'autre de C, CD et CD' égales à N; on mènera ensuite BD et BD'; les parallèles menées par le point C à ces deux droites couperont AB aux deux points P et Q cherchés.

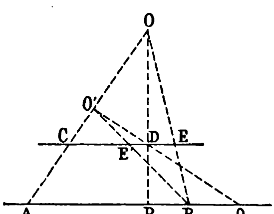


Fig. 157.

On obtiendrait facilement une seconde construction en se servant, comme plus haut, d'une parallèle à AB; elle est suffisamment indiquée par la figure 157, où l'on a :

$$CD=M,\ DE=DE'=N.$$

PROBLÈME II

195. — Construire la quatrième proportionnelle à trois longueurs données M, N, P.

En d'autres termes, il faut trouver une longueur x telle que $\frac{M}{N}=\frac{P}{x}$.

Sur l'un des côtés d'un angle A (*fig.* 158), portons deux longueurs AB, BC égales respectivement à M et N ; sur l'autre côté portons une longueur AD égale à P ; la droite CE parallèle à BD coupe AD en E, et l'on a (153) :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE};$$

DE est donc la quatrième proportionnelle cherchée.

Les propriétés du triangle coupé par une parallèle à l'un des côtés permettent évidemment de modifier cette construction de bien des façons.

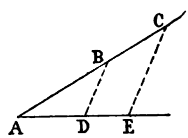


Fig. 158.

Si les longueurs N et P sont égales, DE est la troisième proportionnelle à M et N : les propriétés du triangle rectangle fourniraient pour la construction d'une troisième proportionnelle d'autres procédés faciles à retrouver.

La considération des lignes proportionnelles dans le cercle conduirait encore à des constructions faciles, et qu'il est inutile de détailler pour obtenir une quatrième ou une troisième proportionnelle : au point de vue graphique, d'ailleurs, ces dernières méthodes offrent peu de garantie.

PROBLÈME III

196. — Construire la moyenne proportionnelle entre deux longueurs données M et N.

Ce problème peut être résolu de diverses façons :

1° Portons sur une droite, à la suite l'une de l'autre,

deux longueurs AB, BC égales respectivement à M et N (*fig.* 159). Décrivons une demi-circonférence sur AC comme diamètre, et soit D le point où la perpendiculaire en B à AC coupe cette demi-circonférence. BD est la moyenne proportionnelle cherchée (**181**);

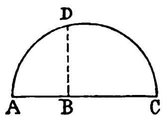


Fig. 159.

2° Portons sur une droite, et dans le même sens, deux longueurs AB, AC égales respectivement à M et N (*fig.* 160); sur la plus grande AC comme diamètre décrivons une demi-circonférence, et soit D le point où la perpendiculaire en B à AC coupe cette demi-circonférence; AD est la moyenne proportionnelle cherchée (**181**);

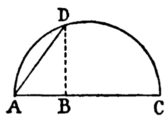


Fig. 160.

3° Portons sur une droite, et dans le même sens, deux longueurs AB, AC égales respectivement à M et N (*fig.* 161); sur leur différence BC comme corde décrivons une circonférence quelconque, et menons AD tangente en D à cette circonférence; AD est la moyenne proportionnelle cherchée (**177**).

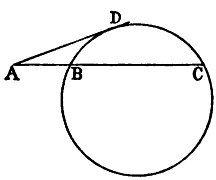


Fig. 161.

Au point de vue graphique ce dernier procédé est inférieur aux précédents.

Problème IV

197. — Construire sur une droite donnée A′B′ un triangle semblable à un triangle donné ABC (*fig.* 162).

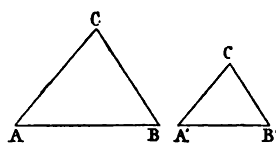


Fig. 162.

Soit A′B′ le côté homologue du côté AB; en A′ et B′

faisons des angles égaux aux angles A et B ; le triangle ainsi formé, A′B′C′, sera semblable au triangle donné ABC (**163**).

Problème V

198. — Construire sur une droite donnée A′B′ un polygone semblable à un polygone donné ABCDE (*fig.* 163).

Soit A′B′ le côté homologue du côté AB. Décomposons par des diagonales le polygone donné en triangles ABC, ACD, ADE ; construisons sur A′B′ un triangle A′B′C′ semblable au triangle ABC, A′B′ et AB étant homologues ; puis sur A′C′ un triangle A′C′D′ semblable au triangle ACD, A′C′ et AC étant homologues ;

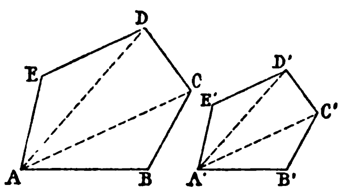


Fig. 163.

puis sur A′D′ un triangle A′D′E′ semblable au triangle ADE, les côtés A′D′ et AD étant homologues.

Si on a pris soin, en même temps, que les triangles consécutifs A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′ soient disposés de la même façon que les triangles ABC, ACD, ADE, les deux polygones A′B′C′D′E′ et ABCDE seront semblables comme composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés ; le polygone A′B′C′D′E′ répond donc à la question.

199. — Si l'on demande de construire un polygone semblable à un polygone donné ABCDE, le rapport de similitude étant donné, on ramènera la question à la précédente, en choisissant le côté A′B′ de telle façon que le rapport $\frac{A'B'}{AB}$ soit égal au rapport donné, ce qui demande simplement la construction d'une quatrième proportionnelle.

On peut encore opérer de la façon suivante que le lecteur justifiera aisément :

Joignons les sommets du polygone ABCDE à un point quelconque O du plan (*fig.* 164) ; prenons OA′ telle que le rapport $\frac{OA'}{OA}$ soit égal au rapport donné. Par A′ menons

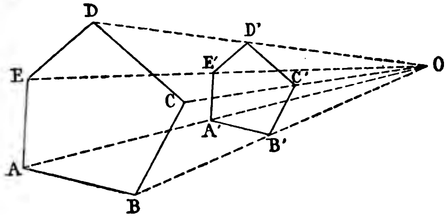


Fig. 164.

A′B′ parallèle à AB jusqu'à sa rencontre avec OB ; puis par B′ menons B′C′ parallèle à BC jusqu'à sa rencontre avec OC, et ainsi de suite.

Le polygone ainsi formé A′B′C′D′E′ est semblable au polygone donné.

Problème VI

200. — Mener une tangente commune à deux circonférences données O et O′ (*fig.* 165).

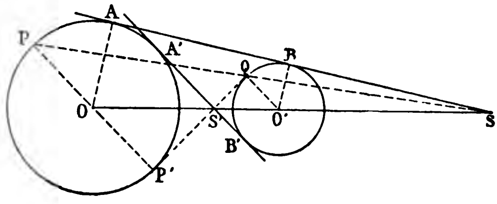


Fig. 165.

Ce problème, que nous avons déjà traité (149), peut encore être résolu de la façon suivante :

1° Soit AB une tangente commune extérieure qui touche

les deux circonférences O et O′ respectivement en A et B, et qui coupe la ligne des centres OO′ en S. Appelons R et R′ les rayons des deux circonférences, et supposons par exemple $R > R'$. Les deux triangles rectangles AOS, BO′S sont semblables comme ayant un angle aigu commun et donnent :

$$\frac{OS}{O'S} = \frac{OA}{O'B} \text{ ou } \frac{OS}{O'S} = \frac{R}{R'}.$$

Soient OP et O′Q deux rayons des deux circonférences parallèles et de même sens ; appelons S_1 le point où PQ coupe OO′ ; les triangles POS_1, $QO'S_1$ sont évidemment semblables et donnent :

$$\frac{OS_1}{O'S_1} = \frac{OP}{O'Q} = \frac{R}{R'}.$$

Les points S et S_1 divisent donc tous les deux OO′ dans le même rapport, et, comme ils sont tous deux en dehors du segment OO′, ils coïncident (**152**).

Le point S est donc aisé à déterminer, indépendamment des tangentes communes, et pour résoudre le problème il suffira de mener par ce point une tangente à l'une des deux circonférences données.

Le problème admet deux solutions si $OS > R$ (ou $O'S > R'$). Or de la proportion

$$\frac{OS}{O'S} = \frac{R}{R'}$$

on déduit :

$$\frac{OS}{OS - O'S} = \frac{R}{R - R'} \text{ d'où } OS = \frac{R \times OO'}{R - R'}.$$

La condition $OS > R$ devient donc $OO' > R - R'$, et on retrouve les résultats déjà obtenus (**149**).

Si l'on avait $R = R'$, la tangente commune AB serait parallèle à OO′.

2° Soit A′B′ une tangente commune intérieure qui touche les deux circonférences en A′ et B′ et qui coupe la

ligne des centres en S′, située sur le segment OO′. On a encore $\frac{OS'}{O'S'} = \frac{R}{R'}$. De plus, si OP′ et O′Q sont deux rayons des deux circonférences parallèles et de sens contraires, la ligne P′Q passe en S′, comme plus haut PQ passait en S. Le point S′ est donc aisé à déterminer, et, pour résoudre le problème, il suffira de mener par ce point une tangente à l'une des deux circonférences données.

Le problème admet deux solutions si $OS' > R$ (ou $O'S' > R'$). Or de la proportion $\frac{OS'}{O'S'} = \frac{R}{R'}$ on déduit $OS' = \frac{R \times OO'}{R + R'}$, de sorte que la condition $OS' > R$ devient $OO' > R + R'$, et on retrouve les résultats déjà obtenus (**149**).

Problème VII

201. — Construire deux lignes, connaissant leur somme et leur produit.

La somme des deux lignes est une ligne donnée p; quant à leur produit, c'est le carré d'une ligne donnée q.

Sur une droite AB égale à p comme diamètre décrivons une demi-circonférence (*fig.* 166). Au point A menons la tangente et prenons sur cette droite une longueur AC égale à q; par C menons une parallèle à AB qui coupe la demi-circonférence en D et D′ : les deux lignes CD et CD′ répondent à la question. En effet on a d'abord (**177**) :

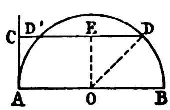


Fig. 166.

$$CD \times CD' = \overline{CA}^2 = q^2.$$

Soit en second lieu OE la perpendiculaire abaissée du centre de la demi-circonférence sur CD; on a $CD = CE + ED$, $CD' = CE - ED'$; mais $ED = ED'$; donc $CD + CD' = 2CE = 2OA = p$, puisque p est le diamètre de la demi-circonférence.

Le problème n'est possible que si CD rencontre la demi-circonférence ; pour cela, il faut OE < OA, c'est-à-dire $q < \frac{p}{2}$.

Si $q = \frac{p}{2}$, les deux points D et D′ coïncident et les longueurs cherchées sont égales chacune à $\frac{p}{2}$.

Si l'on veut calculer CD et CD′, on remarquera que le triangle rectangle ODE donne $ED = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{OE}^2}$, et comme l'on a $CE = OD = \frac{p}{2}$, il vient :

$$CD = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2},$$

$$CD' = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}.$$

Problème VIII

202. — Construire deux lignes, connaissant leur différence et leur produit.

La différence des deux lignes est une ligne donnée p; quant à leur produit, c'est le carré d'une ligne donnée q.

Sur une droite AB égale à p comme diamètre décrivons une circonférence O (*fig.* 167). Au point A menons la tangente et prenons sur cette droite une longueur AC égale à q. La droite OC coupe la circonférence en D et D′ : les deux lignes CD et CD′ répondent à la question. En effet, on a d'abord (177) :

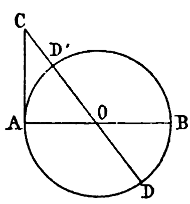


Fig. 167.

$$CD \times CD' = \overline{CA}^2 = q^2.$$

En second lieu $CD - CD' = DD' = AB = p$.

Le problème est toujours possible.

Si l'on veut calculer CD et CD′, on remarquera que le triangle rectangle OAC donne $OC=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AC}^2}$, et, comme $OA=OD=\frac{p}{2}$, on aura :

$$CD=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q^2}+\frac{p}{2},$$

$$CD'=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q^2}-\frac{p}{2}.$$

Si par exemple $p=q$, on a :

$$CD=\frac{p}{2}(\sqrt{5}+1),$$

$$CD'=\frac{p}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Exercices

1\. — Mener par un point donné A entre deux droites données une droite partagée par A dans un rapport donné.

2\. — Inscrire ou exinscrire à un triangle un rectangle dont le rapport des côtés soit donné. — Cas particulier du carré.

3\. — Déterminer un point dont les distances à trois points donnés soient dans des rapports donnés.

4\. — Déterminer un point dont les distances à trois droites données soient dans des rapports donnés.

5\. — Déterminer un point d'où trois circonférences données soient vues sous un même angle.

6\. — Construire un cercle orthogonal à trois cercles donnés.

7\. — Par un des points d'intersection de deux cercles qui se coupent, mener une sécante telle que le rapport ou le produit des deux cordes interceptées ait une valeur donnée.

8\. — Construire un triangle, connaissant deux côtés et la longueur de la bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle qu'ils comprennent. (On construira d'abord un triangle semblable au triangle cherché, ayant le troisième côté arbitraire.)

9\. — Dans un triangle rectangle ABC, on connait $BC=a$ et la hauteur $AD=h$ de l'hypoténuse. Construire le triangle. Calculer les côtés b et c.

Application. — $a=6^m,50$; $h=3^m,12$.
Réponse. — $b=5^m,20$; $c=3^m,90$.

10. — Dans le même triangle on connaît $AB = c$ et CD. Construire le triangle. Calculer les côtés a et b.

Application. — $c = 3^m,30$; $CD = 3^m,52$.
Réponse. — $a = 5^m,50$; $b = 4^m,40$.

11. — Construire un cercle tangent à une droite donnée et passant par deux points donnés. (On détermine le point de contact avec la droite en se servant du théorème du n° **177**.)

12. — Construire un cercle tangent à un cercle donné et passant par deux points donnés. (On applique le théorème de l'exercice 35, § 4.)

13. — Construire un cercle tangent à deux droites données et passant par un point donné. (On ramène à l'exercice 11, en remarquant que le symétrique du point par rapport à la bissectrice de l'angle appartient au cercle cherché.)

14. — Construire un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée et passant par un point donné. (On ramène à l'exercice 11 ou 12 en se servant du théorème énoncé dans l'exercice 13, § 3.)

15. — Construire un cercle tangent à deux cercles donnés et passant par un point donné. (On ramène à l'exercice 12 en utilisant le théorème énoncé dans l'exercice 12, § 3.)

16. — Construire un cercle tangent à deux droites données et à un cercle donné. (On ramène à l'exercice 13.)

17. — Construire un cercle tangent à deux cercles donnés et à une droite donnée. (On ramène à l'exercice 14.)

18. — Construire un cercle tangent à trois cercles donnés. (On ramène à l'exercice 15.)

19. — Soit une demi-circonférence O de diamètre AB et de rayon R; on décrit sur les rayons OA et OB deux demi-circonférences situées dans l'intérieur de la première; quel est le rayon x d'une circonférence tangente à la fois aux trois demi-circonférences tracées?

Réponse. — $x = \frac{R}{3}$.

§ 6. — Les polygones réguliers.

203. — Un polygone convexe est dit *régulier* s'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux.

Le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers. Le théorème suivant va nous montrer l'existence des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés.

Théorème XX

On peut inscrire ou circonscrire à une circonférence donnée O un polygone régulier d'un nombre quelconque n de côtés (*fig.* 168).

1° Supposons la circonférence divisée en n parties égales par les points A_1, A_2, A_3..... (sur la figure, on a supposé $n = 7$).

Joignons ces points de division successifs; nous formons ainsi un polygone inscrit de n côtés qui est régulier : car tous les côtés sont égaux comme cordes sous-tendant des arcs égaux, et tous les angles sont égaux comme angles inscrits ayant la même mesure, savoir : la moitié de l'arc formé par $(n-2)$ divisions.

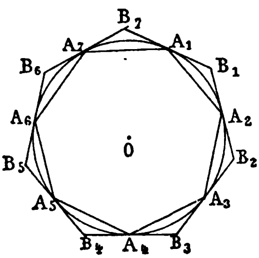


Fig. 168.

2° Menons les tangentes aux points de division; nous formons ainsi un polygone circonscrit de n côtés B_1B_2..., qui est régulier.

En effet, tous les triangles isocèles tels que $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$,... sont égaux comme ayant un côté égal ($A_1A_2 = A_2A_3 = ...$ d'après ce qui précède) adjacent à des angles égaux chacun à chacun ($B_1\hat{A}_1A_2 = B_1\hat{A}_2A_1 = B_2\hat{A}_2A_3 = B_2\hat{A}_3A_2 = ...$, car tous ces angles formés par une corde et une tangente ont pour mesure la moitié d'une division de la circonférence). On a donc les égalités :

$$A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = ... = B_7A_1$$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{B}_3 = ... = \hat{B}_7.$$

Il en résulte que le polygone a ses angles égaux, et aussi ses côtés égaux, puisque chacun de ses côtés B_1B_2, par exemple, est la somme des deux segments A_1A_2,

A_2B_2 égaux entre eux et égaux aux segments analogues.

Le polygone $B_1B_2B_3$... est donc régulier.

204. Remarque. — Supposons toujours la circonférence partagée en n parties égales par les points A_1, A_2, A_3,... (*fig.* 169). Les milieux B_1, B_2, B_3... des arcs successifs A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,... divisent évidemment eux aussi la circonférence en n parties égales. Si donc on mène les tangentes en ces points, on formera un polygone régulier circonscrit $C_1C_2C_3$... d'après ce qui précède.

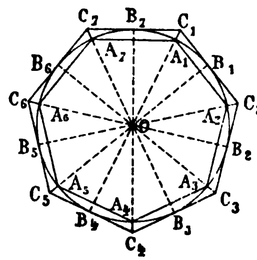


Fig. 169.

Il est clair que ce polygone a ses côtés respectivement parallèles aux côtés du polygone inscrit $A_1A_2A_3$..., et que les sommets correspondants A_1 et C_1, A_2 et C_2,... de ces deux polygones sont sur les mêmes rayons de la circonférence : en effet C_1C_2 et A_1A_2 sont parallèles comme perpendiculaires au rayon OB_1 et les tangentes en B_1 et B_2 se coupent sur la bissectrice de l'angle B_1OB_2 (**144**), bissectrice qui est précisément la droite OA_2.

Théorème XXI

205. — On peut inscrire et circonscrire une circonférence à un polygone régulier donné (*fig.* 170).

1° Soient A_1,A_2,A_3,A_4 quatre sommets consécutifs du polygone. Nous allons montrer que la circonférence qui passe par les trois points A_1, A_2, A_3 passe aussi par A_4. Il en résultera évidemment, en répétant le raisonnement autant de fois qu'il faudra, que cette circonférence sera circonscrite au polygone.

Soit O le centre de la circonférence qui passe par A_1, A_2, A_3, et menons OB_2 perpendiculaire sur A_2A_3 en son milieu. Si nous faisons tourner le demi-plan OB_2A_2 au-

tour de OB_2 jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le demi-plan OB_2A_3, le point A_2 viendra coïncider avec A_3 ; la droite A_2A_1 prendra la direction A_3A_4 à cause de l'égalité des angles A_2 et A_3, le polygone étant régulier ; enfin le point A_1 viendra en A_4, puisque pour la même raison les côtés A_3A_4 et A_2A_1 sont égaux. Il en résulte que OA_1 viendra s'appliquer sur OA_4, et que par suite $OA_4 = OA_1$, c'est-à-dire que la circonférence O passe par le point A_4, c. q. f. d. Cette circonférence est d'ailleurs la seule qui puisse être circonscrite au polygone, puisque trois points déterminent une circonférence.

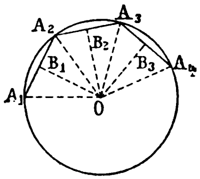


Fig. 170.

2° Menons maintenant les perpendiculaires OB_1, OB_2, OB_3... sur les côtés du polygone en leurs milieux ; les triangles rectangles OB_1A_1, OB_1A_2, OB_2A_2, OB_2A_3,... sont tous égaux puisque l'on a $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ...$, et $A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = ...$ (à cause de l'égalité des côtés du polygone régulier). Donc la circonférence décrite de O comme centre avec OB_1 pour rayon touchera tous les côtés du polygone en leurs milieux, de sorte qu'il existe une circonférence inscrite au polygone, c. q. f. d. On verra aisément qu'il n'existe pas d'autre circonférence inscrite au polygone.

206. Remarque. — Une ligne brisée convexe est dite *régulière* si elle a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. La démonstration précédente montre, sans qu'il soit nécessaire de la modifier en rien, que l'on peut inscrire et circonscrire une circonférence à une ligne brisée régulière donnée.

207. — D'après les théorèmes précédents on voit que l'étude des polygones réguliers se ramène à l'étude de la division de la circonférence en parties égales.

Un polygone régulier admet une circonférence circonscrite et une circonférence inscrite ; ces deux circonférences ont même centre qui est le *centre* du polygone. Le rayon de la circonférence circonscrite est le *rayon* du polygone ;

le rayon de la circonférence inscrite est l'*apothème* du polygone.

Le centre est le point de concours commun des bissectrices de tous les angles du polygone et des perpendiculaires élevées sur tous les côtés du polygone en leurs milieux.

Les rayons qui vont du centre aux sommets du polygone décomposent celui-ci en triangles isocèles égaux. L'*angle au centre* du polygone est l'angle au sommet de chacun de ces triangles. Si le polygone a n côtés, la somme des angles au centre valant quatre angles droits, l'angle au centre mesuré en degrés est $\frac{360^\circ}{n}$.

L'angle du polygone est évidemment le supplément de son angle au centre.

Voici les angles au centre et les angles des polygones réguliers les plus simples :

Le triangle équilatéral a	pour angle au centre	120°	et pour angle	60°.
Le carré	—	90°	—	90°.
Le pentagone	—	72°	—	108°.
L'hexagone	—	60°	—	120°.
L'octogone	—	45°	—	135°.
Le décagone	—	36°	—	144°.
Le dodécagone	—	30°	—	150°.
Le pentédécagone	—	24°	—	156°.

L'angle au centre diminue avec le nombre des côtés; l'angle du polygone augmente avec le nombre des côtés.

Remarque. — Des définitions analogues s'appliqueraient aux lignes brisées régulières : on remarquera seulement que leur angle au centre peut être quelconque.

Théorème XXII

208. — Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables; leur rapport de similitude est le rapport de leurs rayons ou de leurs apothèmes.

Soient AB, A'B' deux côtés des deux polygones, et O et O' leurs centres (*fig.* 171).

D'abord les polygones sont semblables comme ayant les angles égaux, puisque, d'après ce qui précède, l'angle d'un polygone régulier est déterminé par le nombre de ses côtés, et aussi comme ayant les côtés proportionnels, puisque dans chacun des deux polygones tous les côtés sont égaux.

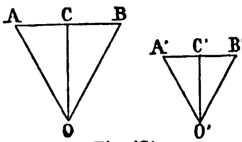


Fig. 171.

Les deux triangles OAB, O'A'B' sont semblables comme ayant les angles égaux chacun à chacun ($\hat{O} = \hat{O}$ comme angles au centre de polygones réguliers d'un même nombre de côtés, $\hat{A} = \hat{A}' = \hat{B} = \hat{B}'$ comme demi-angles de polygones réguliers d'un même nombre de côtés). Donc :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'}.$$

Si OC et OC' sont les apothèmes, les triangles rectangles OAC, O'A'C' qui ont les angles aigus A et A' égaux sont semblables, et l'on a :

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OC}{O'C'};$$

on peut donc écrire :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OC}{O'C'},$$

c'est-à-dire que le rapport de similitude $\frac{AB}{A'B'}$ des deux polygones est égal au rapport de leurs rayons et à celui de leurs apothèmes, c. q. f. d.

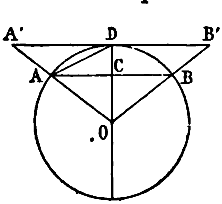


Fig. 172.

209. — Soit a le côté AB d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans une circonférence O de rayon R (*fig.* 172); soit h l'apothème OC qui coupe la circonférence en D, milieu de l'arc AB, et en D'.

La tangente en D coupe les rayons OA et OB en A′ et B′, et A′B′ est le côté du polygone régulier circonscrit à la même circonférence et ayant le même nombre n de côtés : désignons A′B′ par c, et le rayon OA′ de ce polygone par d.

Si on se donne a et R, il est facile de calculer h, c et d.

Le triangle rectangle OAC donne d'abord :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AC}^2,$$

et comme $AC = \frac{a}{2}$, il en résulte :

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Comme $R^2 - \frac{a^2}{4} = R^2\left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right)$, nous écrirons :

$$(1) \qquad h = R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

On a ensuite, d'après le théorème précédent :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OD}{OC},$$

d'où
$$c = \frac{aR}{h}, \qquad d = \frac{R^2}{h},$$

ou
$$c = \frac{aR}{R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}}, \qquad d = \frac{R^2}{R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}},$$

ou finalement :

$$(2) \quad c = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}}, \qquad (3) \quad d = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}}.$$

210. — Si l'on a inscrit dans une circonférence un polygone régulier de n côtés P, il est facile d'inscrire dans la même circonférence un polygone régulier P′ d'un

nombre double, $2n$, de côtés. Il suffit, en effet, de diviser chacun des arcs sous-tendus par les côtés de P en deux parties égales (138) : les points ainsi obtenus et les sommets de P divisent la circonférence en $2n$ parties égales, et par suite sont les sommets de P′.

Le côté du polygone régulier P′ inscrit dans la circonférence O et ayant $2n$ côtés est donc AD (*fig.* 172). Désignons-le par a', et proposons-nous de calculer a', connaissant a et R. La corde AD est moyenne proportionnelle entre le diamètre DD′ et sa projection CD sur ce diamètre (181), de sorte que l'on a :

$$a'^2 = 2R \times CD;$$

mais $CD = OD - OC = R - h = R - R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}$.

Donc :

$$a'^2 = 2R\left(R - R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}\right) = R^2\left(2 - \sqrt{4 - \frac{a^2}{R^2}}\right)$$

et par suite :

$$(4) \qquad a' = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{a^2}{R^2}}}.$$

On peut encore écrire évidemment :

$$a'^2 = \frac{2R \times CD \times CD'}{CD'}.$$

Mais $\qquad CD \times CD' = \overline{AC}^2 = \frac{a^2}{4}$ (181),

et $\qquad CD' = R + h = R + R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}$;

donc :

$$a'^2 = \frac{2R \times \frac{a^2}{4}}{R + R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}} = \frac{a^2}{2 + \sqrt{4 - \frac{a^2}{R^2}}},$$

et par suite :

$$(5) \qquad a' = \frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{4-\frac{a^2}{R^2}}}}.$$

Le lemme du n° **173** fournit d'ailleurs les identités :

$$\left(\sqrt{1+\frac{a}{2R}}-\sqrt{1-\frac{a}{2R}}\right)^2 = 2-2\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}$$
$$= 2-\sqrt{4-\frac{a^2}{R^2}},$$
$$\left(\sqrt{1+\frac{a}{2R}}+\sqrt{1-\frac{a}{2R}}\right)^2 = 2+2\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}$$
$$= 2+\sqrt{4-\frac{a^2}{R^2}}.$$

On peut donc encore écrire :

$$(6) \qquad a' = R\left[\sqrt{1+\frac{a}{2R}}-\sqrt{1-\frac{a}{2R}}\right].$$

$$(7) \qquad a' = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{2R}}+\sqrt{1-\frac{a}{2R}}}.$$

Soit h' l'apothème de P'. On a :

$$h' = R\sqrt{1-\frac{a'^2}{4R^2}}.$$

Or $$\frac{a'^2}{R^2} = 2-\sqrt{4-\frac{a^2}{R^2}};$$

donc $$1-\frac{a'^2}{4R^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}.$$

Il vient par suite :

$$(8) \quad h' = R\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}}{2}} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{4-\frac{a^2}{R^2}}}.$$

L'une des identités rappelées plus haut nous permet encore d'écrire :

$$(9) \qquad h' = \frac{R}{2}\left[\sqrt{1+\frac{a}{2R}}+\sqrt{1-\frac{a}{2R}}\right].$$

Remarque. — Si, connaissant a' et R, on voulait calculer a et h, on aurait :

$$h = R - CD \text{ et } \frac{a^2}{4} = a'^2 - \overline{CD}^2.$$

Mais
$$CD = \frac{a'^2}{2R} = R.\ \frac{a'^2}{2R^2}.$$

Donc
$$(10) \qquad h = R\left\{1 - \frac{a'^2}{2R^2}\right\}$$

et
$$a^2 = 4a'^2 - \frac{a'^4}{R^2},$$

d'où

$$(11) \qquad a = R\sqrt{4\frac{a'^2}{R^2} - \frac{a'^4}{R^4}}.$$

Les numéros suivants nous offriront de nombreuses occasions d'appliquer ces différentes formules.

Problème IX

211. — Inscrire un carré dans une circonférence donnée O (*fig.* 173).

Il faut diviser la circonférence en quatre parties égales, ce qui se fait en menant deux diamètres perpendiculaires AC, BD (117).

Soit R le rayon de la circonférence et a le côté du carré ; on aura dans le triangle rectangle AOB :

$$a^2 = R^2 + R^2,$$

d'où :

$$a = R\sqrt{2}.$$

L'apothème OK sera :

$$h = R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} = R\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2};$$

donc $OK = \frac{AB}{2}$, ce qui est évident sur la figure.

Le côté A'B' du carré circonscrit sera :

$$c = \frac{aR}{h} = 2R,$$

ce que montre immédiatement la figure.

212. — Marquons les milieux E, F, G, H des arcs AB, BC, CD, DA; le polygone AEBFCGDH sera l'octogone régulier inscrit. On pourrait continuer de même, et l'on voit que l'on pourra inscrire dans la circonférence les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32, 64... côtés.

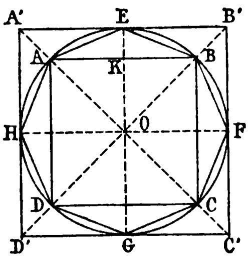


Fig. 173.

Calculons le côté a' de l'octogone; la formule (4) du n° **210** donne :

$$a' = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

et pour l'apothème h', on obtient par la formule (8) :

$$h' = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

213. — Si l'on joignait de trois en trois les sommets de l'octogone, on obtiendrait le polygone AFDECHBG représenté dans la figure 174 et que l'on appelle octogone régulier *étoilé*. Il est facile de calculer le côté et l'apothème de ce polygone. Considérons en effet (*fig.* 175) le triangle AFH, dont le côté FH passe en O, et dont l'angle A par suite est droit. AH est le côté de l'octogone régulier convexe et AF le côté de l'octogone régulier étoilé.

Soit M le milieu de AH et N le milieu de AF; la figure AMON est un rectangle et l'on a par suite :

$$AN = OM, \quad ON = AM,$$

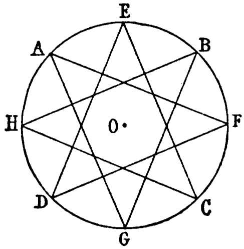


Fig. 174.

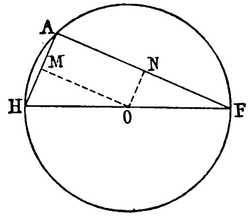


Fig. 175.

c'est-à-dire :

$$\frac{AF}{2} = OM, \quad ON = \frac{AH}{2},$$

d'où

$$AF = 2OM = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$ON = \frac{AH}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

telles sont les valeurs du côté AF et de l'apothème ON de l'octogone étoilé.

214. — D'une façon générale, on obtiendra des *polygones réguliers étoilés* de n côtés en joignant les points de division de la circonférence en n parties égales de p en p, à condition de ne pas obtenir de cette façon une figure fermée avant de revenir au point de départ : c'est ainsi que si l'on joignait de deux en deux les sommets d'un octogone convexe, on obtiendrait, non pas un octogone étoilé, mais un carré.

Problème X

215. — Inscrire un hexagone régulier dans une circonférence donnée (*fig.* 176).

Supposons la circonférence partagée en six parties égales par les points A, B, C, D, E, F : ces points sont diamétralement opposés deux à deux. Considérons le triangle OAB : l'angle au centre AOB a pour mesure une

division de la circonférence. Chacun des angles inscrits OAB, OBA a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés : mais chacun de ces arcs, BCD et AFE, comprend deux divisions de la circonférence; les angles OAB et OBA ont donc chacun pour mesure une division de la circonférence, et par suite sont égaux à l'angle AOB. Le triangle AOB étant équiangle est équilatéral, l'on a :

$$AB = OA = R.$$

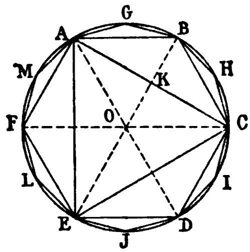


Fig. 176.

Pour inscrire un hexagone régulier dans la circonférence, on portera donc six fois sur la circonférence une ouverture de compas égale au rayon, et on joindra les points de division ainsi obtenus.

Le côté a de l'hexagone régulier est égal à R; son apothème h sera :

$$h = R\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

En joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone régulier inscrit, on obtient le triangle équilatéral inscrit ACE. Le côté AC et l'apothème OK sont immédiatement donnés par les formules (11) et (10). On a :

$$AC = R\sqrt{3}, \qquad OK = \frac{R}{2}.$$

Ces relations sont évidentes sur la figure en remarquant que OABC est un losange.

216. — Déterminons les milieux G, H, I, J, L, M des arcs AB, BC..., sous-tendus par les côtés de l'hexagone; le polygone AGBHCIDJELFM sera le dodécagone régulier inscrit. On pourrait continuer de même et l'on voit que l'on pourra inscrire dans la circonférence les polygones réguliers de 3, 6, 12, 24, 48, 96,... côtés.

Calculons le côté a' et l'apothème h' du dodécagone régulier.

Les formules (4, 6, 8, 9) du n° **210** donnent :

$$a' = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = R\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$

$$h' = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{R}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

217. — Si l'on joint de cinq en cinq les sommets du dodécagone, on obtient le dodécagone régulier étoilé AIFHEGDMCLBJ représenté dans la figure 177. Il est facile de calculer le côté

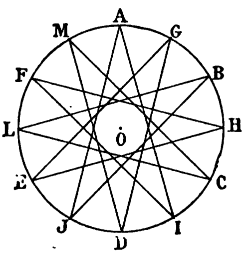


Fig. 177.

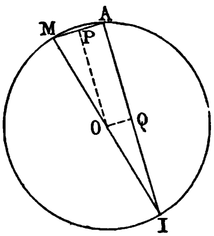


Fig. 178.

et l'apothème de ce polygone. Considérons en effet (*fig.* 178) le triangle AIM, dont le côté IM passe en O et qui par suite est rectangle en A. AM est le côté du dodécagone convexe et AI le côté du dodécagone étoilé. Soit P le milieu de AM et Q le milieu de AI; la figure APOQ est un rectangle, et l'on a :

$$AQ = OP, \quad OQ = AP,$$

c'est-à-dire

$$\frac{AI}{2} = OP, \quad OQ = \frac{AM}{2},$$

d'où

$$AI = 2OP = R\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

$$OQ = \frac{AM}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{R}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Telles sont les valeurs du côté AI et de l'apothème OQ du dodécagone étoilé.

Problème XI

218. — Diviser une circonférence donnée O en dix parties égales.

Supposons la circonférence O partagée en dix parties égales aux points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, diamétralement opposés deux à deux (*fig.* 179). En joignant successivement ces points de division, on obtiendra le décagone régulier inscrit ABCDEFGHIJ représenté sur la figure 180; en joignant ces mêmes points de trois en trois, on obtiendra le décagone régulier étoilé ADGJCFIBEH représenté sur la même figure. En joignant ces points de deux en deux ou de quatre en quatre, on obtient le pentagone régulier inscrit ACEGI ou le pentagone régulier étoilé AEICG, représentés sur la figure 181.

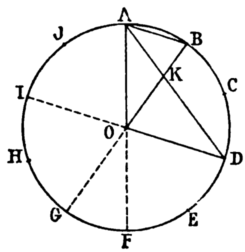


Fig. 179.

Comme on sait diviser un arc en deux parties égales, on voit que, si l'on sait diviser une circonférence en dix parties égales, on saura inscrire dans cette circonférence les polygones réguliers de 5, 10, 20, 40, 80,... côtés.

Pour résoudre le problème, nous allons chercher simultanément les côtés AB et AD des décagones réguliers convexe et

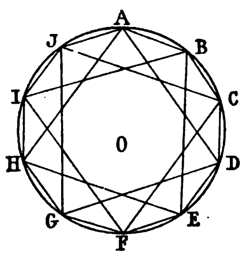


Fig. 180.

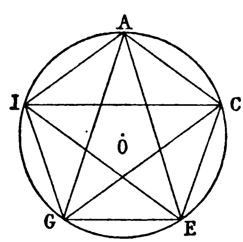


Fig. 181.

étoilé (*fig.* 179). Menons les rayons OA, OB, OD et soit K le point où OB coupe AD. L'angle inscrit B a pour mesure la moitié de l'arc AIG compris entre ses côtés, c'est-à-dire deux divisions de la circonférence; l'angle AKB a pour mesure la demi-somme des arcs AB et GED compris entre ses côtés, c'est-

à-dire aussi deux divisions de la circonférence. Ces deux angles sont donc égaux, et par suite, le triangle ABK est isocèle, de sorte que $AB = AK$. On en déduit cette première relation :

$$AD - AB = AD - AK = KD.$$

D'ailleurs l'angle au centre BOD a aussi pour mesure deux divisions de la circonférence et par suite est égal à l'angle OKD ; on a donc dans le triangle OKD :

$$KD = OD = R;$$

de sorte que :

$$(1) \quad AD - AB = R.$$

L'angle inscrit OAD a pour mesure la moitié de l'arc FED compris entre ses côtés, c'est-à-dire une division de la circonférence ; il en est de même de l'angle inscrit ADO et de l'angle au centre AOB : les deux triangles AOK, AOD sont donc isocèles de bases OA et AD et sont semblables comme ayant les angles à la base égaux ; on en déduit :

$$\frac{AD}{OA} = \frac{OA}{AK},$$

ou, puisque $AK = AB$:

$$(2) \quad AD.AB = \overline{OA}^2 = R^2.$$

Les deux égalités (1) et (2) montrent que AB et AD sont deux lignes dont la différence est R et dont le produit est R^2. Par suite, on pourra les construire de la façon suivante (**202**) : sur le rayon OM, perpendiculaire à OA comme diamètre, décrivons

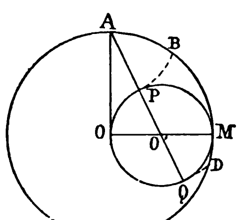


Fig. 182.

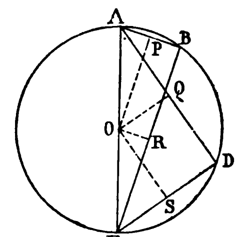


Fig. 183.

une circonférence de centre O' (*fig.* 182) ; la droite AO' coupe cette circonférence en P et Q ; AP et AQ sont les côtés des

décagones réguliers convexe et étoilé inscrits dans la circonférence O. Quant aux valeurs de ces côtés; elles sont (**202**) :

$$AP = AB = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$AQ = AD = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right).$$

219. — Calculons les apothèmes OP et OQ des deux décagones convexe et étoilé (*fig.* 183). On a :

$$OP = R\sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}}, \quad OQ = R\sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}}$$

d'où :

$$OP = \frac{R}{4}\sqrt{16 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$OQ = \frac{R}{4}\sqrt{16 - (5 + 1 + 2\sqrt{5})} = \frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Il est facile alors d'obtenir les valeurs des côtés et des apothèmes des deux pentagones convexe et étoilé ; FD et FB sont les côtés de ces deux pentagones; soient OS et OQ leurs apothèmes ; les figures OPBR, OQDS sont des rectangles et l'on en déduit :

$$FD = 2OQ = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad FB = 2OP = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

$$OS = \frac{1}{2}AD = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right), \quad OR = \frac{1}{2}AB = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Calculons encore le côté du polygone régulier inscrit de vingt côtés.

Les formules (4) et (6) du n° **210** donnent pour ce côté la valeur :

$$R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}} = R\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}},$$

ou :

$$R\left[\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}}\right]$$

$$= \frac{R}{2}\left[\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}\right].$$

De même l'apothème de ce polygone sera donné par les formules (8) et (9) du même numéro et aura pour valeur :

$$\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{R}{4}\left[\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right].$$

Exercices

1\. — On peut exécuter un pavage en employant soit des triangles équilatéraux, soit des carrés, soit des hexagones réguliers. Peut-on le faire en employant d'autres polygones réguliers égaux ?

2\. — On peut exécuter un pavage en employant simultanément soit des carrés et des octogones réguliers de même côté ; soit des triangles équilatéraux et des dodécagones réguliers de même côté ; soit des dodécagones réguliers, des hexagones réguliers et des carrés de même côté.

3\. — Un polygone équilatéral inscrit dans un cercle est régulier. Un polygone équiangle inscrit dans un cercle est régulier si le nombre de ses côtés est impair.

4\. — Un polygone équiangle circonscrit à un cercle est régulier. Un polygone équilatéral circonscrit à un cercle est régulier si le nombre de ses côtés est impair.

5\. — Les triangles équilatéraux circonscrit et inscrit à une circonférence ont pour rapport de similitude le nombre 2.

6\. — Le carré du côté du pentagone régulier est égal au côté du décagone régulier plus le carré du rayon.

7\. — L'arc sous-tendu par le côté du pentédécagone régulier est la différence des arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone et du décagone réguliers. En déduire l'inscription du pentédécagone régulier dans la circonférence.

8\. — En joignant les sommets du pentédécagone régulier de deux en deux, ou de quatre en quatre, ou de sept en sept, on obtient trois pentédécagones réguliers étoilés.

Calculer les côtés des quatre pentédécagones réguliers convexe et étoilés inscrits dans la circonférence de rayon R.

(Pour le pentédécagone convexe, par exemple, soit AA' un diamètre, AB et AC les côtés de l'hexagone et du décagone ; on appliquera la proposition de l'exercice 29, § IV, au quadrilatère inscrit AB'BC.)

Réponse. — Pentédécagone convexe :

$$a_1=\frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right]=0{,}4158\ldots\times R.$$

1^er^ Pentédécagone étoilé :

$$a_2=\frac{R}{4}\left[-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\right]=0{,}8134\ldots\times R.$$

2° Pentédécagone étoilé :

$$a_3 = \frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right] = 1,4862\ldots \times R.$$

3° Pentédécagone étoilé :

$$a_4 = \frac{R}{4}\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\right] = 1,9890\ldots \times R.$$

9. Calculer les apothèmes des pentédécagones réguliers convexe et étoilés.

Pentédécagone convexe :

$$h_1 = \frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)\right] = 0,9781\ldots \times R.$$

1er Pentédécagone étoilé :

$$h_2 = \frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1)\right] = 0,9135\ldots \times R.$$

2° Pentédécagone étoilé :

$$h_3 = \frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{5}-1)\right] = 0,6691\ldots \times R.$$

3° Pentédécagone étoilé :

$$h_4 = \frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (\sqrt{5}+1)\right] = 0,1045\ldots \times R.$$

10. — Calculer les côtés et les apothèmes des quatre polygones réguliers de trente côtés convexes et étoilés. — On obtient en gardant les notations précédentes.

Polygone convexe :			$a'_1 = 2h_4,\ h'_1 = \frac{a_4}{2}$;
1er	—	étoilé	$a'_2 = 2h_3,\ h'_2 = \frac{a_3}{2}$;
2°	—	—	$a'_3 = 2h_2,\ h'_3 = \frac{a_2}{2}$;
3°	—	—	$a'_4 = 2h_1,\ h'_4 = \frac{a_1}{2}$.

11. — Calculer les rayons des cercles inscrits et circonscrits aux différents polygones réguliers étudiés en prenant le côté pour unité.

Réponse. —

	R	r		R	r
Carré,	0,7071	0,5000.	Dodéc. étoilé,	0,5176	0,1339.
Octogone,	1,3065	1,2071.	Pentagone,	0,8506	0,6882.
Octog. étoilé,	0,5412	0,2071.	Pent. étoilé,	0,5257	0,1624.
Triangle,	0,5773	0,2886.	Décagone,	1,6180	1,5388.
Hexagone,	1,0000	0,8660.	Décag. étoilé,	0,6180	0,3632.
Dodécagone,	1,9318	1,8660.			

12\. — Inscrire dans un triangle équilatéral donné trois cercles égaux tangents entre eux et déterminer leur rayon en fonction du côté du triangle.

13\. — Etudier les figures formées par les points d'intersection des côtés (prolongés s'il le faut) des polygones réguliers convexes et étoilés de 8, 10 ou 12 côtés et calculer les dimensions de ces figures.

14\. — Sur le diamètre AB d'un cercle O on construit un triangle équilatéral ABC; on divise AB en n parties égales et on joint le sommet C à l'extrémité D de la seconde division à partir de A ; CD prolongée coupe le cercle en E et on demande de calculer la corde AE.

Réponse. — En appelant R le rayon du cercle, on a :

$$\overline{AE}^2 = R^2\left[\frac{n^2 + 4n + 16 - (n-4)\sqrt{n^2 + 16n - 32}}{2(n^2 - 2n + 4)}\right].$$

AE est égal au côté du polygone régulier inscrit de n côtés par $n = 3, 4, 6$.

Pour les autres valeurs de n, AE est une valeur approchée du côté du polygone régulier inscrit de n côtés; on calculera l'erreur commise pour les valeurs de n qui correspondent aux polygones étudiés. Ainsi, pour $n = 5$, on trouve :

$$\overline{AE}^2 = R^2 \times 1{,}380...,$$

tandis que la valeur exacte du carré du côté du pentagone est $R^2 \times 1{,}382...$

§ 7. — La mesure de la circonférence.

220. — Nous avons acquis une idée nette de la longueur d'une courbe par la définition que nous avons donnée au n° **9**; en particulier, cette définition nous a permis d'énoncer cet axiome fondamental : la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, et de

démontrer les théorèmes des nos **31** et **32**. Mais cette définition ne nous a pas donné les moyens de mesurer la longueur d'une courbe : cette mesure, qu'il est impossible de faire directement, ne peut se ramener à la mesure des lignes droites qu'à l'aide de considérations nouvelles que nous allons développer maintenant pour le cas, qui doit seul nous occuper, où la courbe à mesurer est une circonférence ou un arc de circonférence.

Nous avons vu au n° **85** qu'un arc de cercle est une courbe convexe, et par suite est situé tout entier d'un même côté de chacune de ses tangentes. Nous regarderons alors comme évidents les principes suivants :

Un arc de cercle est plus petit que toute ligne ayant mêmes extrémités et l'enveloppant de toutes parts ; la circonférence est plus petite que toute ligne l'enveloppant de toutes parts.

Ces propositions, analogues à celles que nous rappelions plus haut des nos **31** et **32**, résultent de l'idée que nous avons de la longueur d'un arc de courbe, et de ce fait qu'un arc de cercle est convexe : supposons en effet un fil flexible et inextensible affectant la forme de la ligne quelconque APB qui a mêmes extrémités que l'arc de cercle AMB et qui l'enveloppe complètement (*fig.* 184) ; si on tend ce fil suivant la droite AB en AC, il est clair qu'il pourra prendre la forme intermédiaire AMBD, parce que l'arc AMB est *convexe*.

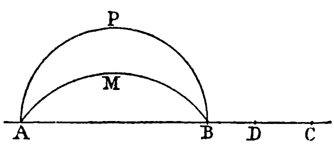


Fig. 184.

221. — Nous regarderons comme évidentes les propositions préliminaires énoncées dans les lemmes suivants :

Si un polygone régulier est inscrit dans une circonférence de rayon R, *et si le nombre de ses côtés augmente indéfiniment, le côté* a *de ce polygone tend vers zéro, et son apothème* h *tend vers le rayon* R.

De même, *si le nombre des côtés d'un polygone régu-*

lier circonscrit à une circonférence de rayon R *augmente indéfiniment, le côté de ce polygone tend vers zéro et son rayon tend vers* R.

222. — Considérons maintenant un polygone régulier d'un nombre quelconque n de côtés inscrit dans la circonférence O de rayon R qu'il s'agit de mesurer, le périmètre p de ce polygone sera inférieur à la longueur C de cette circonférence (**32**). Si on double le nombre des côtés, c'est-à-dire si l'on considère le polygone régulier inscrit ayant $2n$ côtés, le périmètre p' de ce polygone sera encore inférieur à C, mais sera supérieur à p. En effet, soit (*fig.* 185) AB le côté du premier polygone et C le milieu de l'arc AB; AC sera le côté du second polygone et BC aussi; on a d'ailleurs :

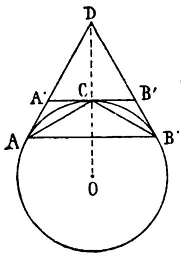


Fig. 185.

$$p = n.AB, \quad p' = 2nAC = n(AC + BC),$$

et, comme le triangle ABC donne $AB < AC + BC$, il en résulte $p < p'$.

Continuons la même opération indéfiniment, c'est-à-dire inscrivons dans la circonférence des polygones réguliers dont les nombres de côtés aillent constamment en doublant et par suite augmentent indéfiniment. Les périmètres p, p', p''... de ces polygones iront constamment en croissant et resteront toujours inférieurs à C.

Considérons en second lieu un polygone régulier du même nombre n de côtés circonscrit à la circonférence, et soit P son périmètre; P sera supérieur à C (**220**).

Doublons le nombre des côtés, le périmètre P' du nouveau polygone sera encore supérieur à C, mais sera inférieur à P. En effet, soit AB le côté du polygone inscrit de n côtés (*fig.* 185) et C le milieu de l'arc AB. Menons la tangente en C qui coupe en A' et B' les tangentes AD et BD en A et B. AD est la moitié du côté du polygone

circonscrit de n côtés et A'B' est le côté du polygone régulier circonscrit de $2n$ côtés ; on a donc :

$$P = 2nAD = 2n(AA' + A'D),\ P' = 2nA'B' = 2n(CA' + CA').$$

D'ailleurs, on a $AA' = CA'$, et dans le triangle rectangle A'CD, $CA' < A'D$; on a donc nécessairement $P < P'$.

Continuons la même opération indéfiniment, c'est-à-dire circonscrivons à la circonférence des polygones réguliers dont les nombres de côtés aillent constamment en doublant ; les périmètres P, P', P'',... de ces polygones iront constamment en décroissant et resteront supérieurs à C.

D'autre part, les polygones réguliers inscrit et circonscrit de même rang parmi ceux que nous venons de considérer sont semblables (**208**), et leur rapport de similitude est égal au rapport de leurs périmètres (**171**) et aussi au rapport de leurs apothèmes (**208**). Si donc h, h', h'',... sont les apothèmes des polygones réguliers inscrits successifs, on aura :

$$\frac{p}{P} = \frac{h}{R},\ \frac{p'}{P'} = \frac{h'}{R},\ \frac{p''}{P''} = \frac{h''}{R}, \ldots ;$$

mais, d'après le lemme précédent, les apothèmes h, h', h'', ... tendent vers R ; par suite les rapports $\frac{h}{R}, \frac{h'}{R}, \frac{h''}{R}, \ldots$ tendent vers l'unité. Il en est donc de même des rapports égaux aux précédents $\frac{p}{P}, \frac{p'}{P'}, \frac{p''}{P''}, \ldots$ Nous en concluons que, lorsque le nombre des côtés des polygones considérés augmente indéfiniment, les périmètres de deux polygones correspondants inscrit et circonscrit tendent à devenir égaux. D'ailleurs le périmètre du polygone inscrit est toujours inférieur à C, et celui du polygone circonscrit est toujours supérieur à C : il s'ensuit nécessairement que les périmètres des deux polygones inscrit et circonscrit tendent à devenir égaux entre eux et à la longueur C de la circonférence.

En résumé, nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

La longueur C *de la circonférence est la limite commune vers laquelle tendent d'une part les périmètres* p, p′, p″, ... *d'une suite de polygones réguliers inscrits dont les nombres de côtés vont constamment en doublant, et d'autre part les périmètres* P, P′, P″, ... *d'une suite de polygones réguliers circonscrits semblables aux précédents. Ceci a d'ailleurs lieu quel que soit le nombre des côtés du polygone initial.*

Cette proposition nous donne le moyen de calculer la longueur d'une circonférence quelconque : les théorèmes suivants vont nous aider dans cette recherche.

Théorème XXIII

223. — Le rapport de deux circonférences quelconques O et O′ est égal au rapport de leurs rayons R et R′ (*fig.* 186).

Inscrivons dans les deux circonférences deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés et de périmètres p et p'. Ces polygones sont semblables et leur rapport de similitude est égal au rapport de leurs rayons R et R′ (**208**) ; d'ailleurs le rapport de similitude de deux polygones semblables est égal au rapport de leurs périmètres (**171**). On a donc :

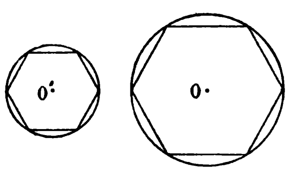


Fig. 186.

$$\frac{p}{p'} = \frac{R}{R'}.$$

Si on double indéfiniment le nombre des côtés des polygones considérés, les périmètres p et p' tendent respectivement vers leurs limites C et C′, longueurs des deux circonférences données, et la proportion précédente sub-

siste toujours ; elle a donc lieu encore à la limite, de sorte que :

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}, \text{ c. q. f. d.}$$

Théorème XXIV

224. — Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant.

La proportion obtenue précédemment peut en effet s'écrire :

$$\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'} \text{ ou } \frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'};$$

le rapport d'une circonférence C à son diamètre 2R est donc le même pour deux circonférences quelconques, c. q. f. d.

Ce rapport est désigné par la lettre grecque π (prononcez *pi*). Connaissant ce rapport, on pourra calculer la longueur d'une circonférence dont on connaîtra le rayon par la formule $C=2\pi R$.

Problème XII

225. — Calculer le rapport de la circonférence au diamètre.

Les rapports $\frac{p}{R}$, $\frac{p'}{R}$, $\frac{p''}{R}$, ... des périmètres des polygones réguliers inscrits dans la circonférence de rayon R et dont les nombres de côtés vont constamment en doublant, augmentent constamment, et ont pour limite le rapport $\frac{c}{R}$, c'est-à-dire le nombre 2π, d'après ce qui précède. Si l'on part d'un polygone de n côtés dont on sache calculer le côté a, le rapport $\frac{p}{R}$ sera $\frac{na}{R}$; si a' est le côté du polygone inscrit de $2n$ côtés, le rapport $\frac{p'}{R}$ sera $\frac{2na'}{R}$.

Or nous avons appris à calculer a', connaissant a; on aura donc facilement le rapport $\frac{p'}{R}$, connaissant le rapport $\frac{p}{R}$. De la même façon, connaissant $\frac{p'}{R}$, on obtiendra $\frac{p''}{R}$, et ainsi de suite.

Si c, c', c''... sont les côtés des polygones réguliers circonscrits correspondants, on sait aussi calculer c connaissant a, c' connaissant a', etc.; d'ailleurs, on a $P = nc$, $P' = 2nc'$...; on pourra donc calculer facilement les rapports $\frac{P}{R}, \frac{P'}{R}, \frac{P''}{R}\ldots$, qui diminuent constamment et ont aussi pour limite $\frac{c}{R}$, c'est-à-dire le nombre 2π.

Lorsque le calcul aura été poussé assez loin pour que deux nombres correspondants des deux séries $\frac{p}{R}, \frac{p'}{R}, \frac{p''}{R}\ldots$, et $\frac{P}{R}, \frac{P'}{R}, \frac{P''}{R}\ldots$, diffèrent de moins d'une unité décimale donnée à l'avance, un cent-millième par exemple, le nombre 2π qui est compris entre ces deux nombres sera représenté par celui de la première série à moins d'un cent-millième près par défaut, et par celui de la seconde série à moins d'un cent-millième près par excès; on en déduira immédiatement la valeur de π à moins d'un cent-millième près.

226. — Voici comment on devra diriger le calcul. Connaissant le côté a du polygone inscrit initial, on aura $\frac{p}{R} = \frac{na}{R}$. Calculons d'abord le rapport correspondant $\frac{P}{R}$ de la seconde série; la formule (2) du n° 209 donne :

$$\frac{c}{R} = \frac{\frac{a}{R}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2}}.$$

Multiplions les deux membres par n et remplaçons c par $\frac{P}{n}$, a par $\frac{p}{n}$, il vient :

$$(1)\quad \frac{P}{R}=\frac{\frac{p}{R}}{\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}\left(\frac{p}{R}\right)^2}}.$$

Calculons maintenant $\frac{p'}{R}$; la formule (5) du n° **210** donne :

$$\frac{a'}{R}=\frac{\frac{a}{R}}{\sqrt{2+\sqrt{4-\left(\frac{a}{R}\right)^2}}}.$$

Multiplions les deux membres par n et remplaçons a' par $\frac{p'}{2n}$, a par $\frac{p}{n}$, il vient :

$$\frac{p'}{R}=\frac{2\frac{p}{R}}{\sqrt{2+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}\left(\frac{p}{R}\right)^2}}}.$$

Ce qu'on peut écrire en divisant haut et bas par 2 :

$$(2)\quad \frac{p'}{R}=\frac{\frac{p}{R}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}\left(\frac{p}{R}\right)^2}\right]}}.$$

L'application répétée des formules (1) et (2) fournira sans difficulté les valeurs des deux suites de nombres $\frac{p}{R}, \frac{p'}{R}, \frac{p''}{R}\ldots$, et $\frac{P}{R}, \frac{P'}{R}, \frac{P''}{R}\ldots$

Remarque. — Pour calculer $\frac{p'}{R}$ il faut se garder

d'employer la formule (4) du n° **210** qui donnerait :

$$\frac{p'}{R} = 2n\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{p}{R}\right)^2}}$$

En effet, si n est suffisamment grand, $\frac{1}{n^2}\left(\frac{p}{R}\right)^2$ est petit ; par suite $\sqrt{4 - \frac{1}{p^2}\left(\frac{p}{R}\right)^2}$ diffère peu de 2, et, pour trouver avec une exactitude suffisante la valeur de $\frac{p'}{R}$, on est obligé de calculer beaucoup plus de chiffres décimaux que l'on ne doit en conserver, inconvénient que ne présente pas la formule (2).

227. — Partons, par exemple, de l'hexagone régulier inscrit pour lequel on a $\frac{p}{R} = 6$ et $n = 6$.

Les formules ci-dessus donnent d'abord :

$$\frac{P}{R} = 6{,}928203, \quad \frac{p'}{R} = 6{,}211657.$$

Continuant de même, on formera le tableau suivant :

n	$\frac{p}{R}$	$\frac{P}{R}$
6	6	6,928283
12	6,211657	6,430781
24	6,265257	6,319319
48	6,278700	6,292171
96	6,282064	6,285429
192	6,282904	6,283744
384	6,283114	6,283324
768	6,283167	6,283220
1536	6,283180	6,283193
3072	6,283183	6,283187
6144	6,283184	6,283185

Nous en déduisons immédiatement la valeur de π :

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

qui est approchée par défaut à moins d'un millionième près.

On obtiendrait le même résultat en partant soit du carré, soit du pentagone : c'est là un exercice que l'on devra faire.

Comme on le voit, le nombre π est un peu supérieur à 3; il suffit de considérer l'hexagone inscrit et le carré circonscrit dont les périmètres sont 3R et 4R pour voir sans calcul que ce nombre est, en effet, compris entre 3 et 4.

228. — Le nombre π est un nombre incommensurable; sa valeur approchée avec quatorze décimales est :

$$\pi = 3{,}14159265358979...$$

En général, on prend $\pi = 3{,}1416$; cette valeur doit être sue par cœur.

Si l'on n'a besoin que d'une faible approximation, on prend $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}1428...$, qui surpasse π de moins de 0,002; cette valeur a été donnée par Archimède (287-212 av. J.-C.), qui, le premier, a découvert la mesure de la circonférence.

On peut encore employer avec avantage la valeur suivante, facile à retenir, qui a été donnée par le géomètre hollandais Adrien Métius (1571-1635) :

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}14159292...$$

Cette valeur surpasse π de moins de 0,0000003; aucun nombre fractionnaire à termes plus simples n'approche davantage de π.

La valeur de $\frac{1}{\pi}$ est $\frac{1}{\pi} = 0{,}31830988618379...$;

en général, on prend $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$; cette valeur doit être sue par cœur.

On peut aussi employer avec avantage les valeurs $\frac{7}{22}$ et $\frac{113}{355}$.

229. — Connaissant le rayon R d'une circonférence, on aura sa longueur C par la formule

$$C = 2\pi R;$$

inversement, connaissant C, on aura le rayon par la formule

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \times \frac{C}{2}.$$

Exemples. — 1° Le diamètre d'une circonférence est de 4 mètres; quelle est sa longueur?

$$4 \times 3{,}1416 = 12{,}5664;$$

la longueur cherchée est donc $12^{m},566$.

2° Trouver le rayon R de la Terre.

On sait que la circonférence du méridien terrestre est de 40000000 de mètres; donc

$$R = \frac{1}{\pi} \times 20000000^{m} = 6366197^{m},72\ldots;$$

en nombres ronds :

$$R = 6366 \text{ kilomètres}.$$

230. — Soit n le nombre qui mesure un arc d'une circonférence de rayon R en degrés et fractions de degrés, et l la longueur de cet arc. Les longueurs de deux arcs sont proportionnelles aux nombres de degrés qu'ils contiennent; la demi-circonférence vaut 180° et a pour longueur πR; on a donc

$$\frac{l}{n} = \frac{\pi R}{180}$$

ou

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Inversement, si on connaît la longueur de l'arc, on aura sa mesure en degrés par la formule

$$n = \frac{180l}{\pi R}.$$

Si on connaît la longueur d'un arc et sa mesure en degrés, on aura le rayon de la circonférence à laquelle il appartient par la formule

$$R = \frac{180l}{n\pi}.$$

Exemples. — 1° Quelle est la longueur de l'arc de 1° sur la circonférence du méridien terrestre?

Comme ici $\pi R = 20000000^m$, on a

$$l = \frac{20000000^m}{180} = 111111^m,11...$$

La longueur de l'arc d'une minute ou *mille marin* sera alors $1851^m,85...$; la longueur de l'arc d'une seconde est $30^m,86...$; le *nœud* est la moitié de cette longueur, soit $15^m,43...$

2° Quelle est la mesure en degrés d'un arc dont la longueur est égale au rayon?

On a :

$$n = \frac{180}{\pi} = 180 \times 0,318309886... = 57,29577948...$$

D'ailleurs, on a :

$$0,29577948... \times 60 = 17,7467688...$$
$$0,7467688... \times 60 = 44,806128...$$

L'arc cherché vaut donc $57°17'44'',806$.

3° Sur une circonférence, un arc de 45° a une longueur de 1 mètre; quel est le rayon de cette circonférence?

$$R = \frac{180}{45\pi} = 4 \times \frac{1}{\pi} = 1^m,273..$$

Remarque. — La formule $l = \frac{\pi R n}{180}$ montre que dans

deux circonférences de rayons différents, les longueurs de deux arcs mesurés par un même nombre de degrés sont proportionnelles aux longueurs des rayons correspondants.

231. — Nous venons de calculer la longueur d'un arc, connaissant sa mesure en degrés, c'est-à-dire son rapport à la circonférence entière. Proposons-nous maintenant de *chercher la longueur d'un arc, connaissant son rayon et la corde qui le sous-tend.* Il est bien entendu qu'il ne s'agit que du plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde donnée.

Un raisonnement identique à celui que nous avons employé pour trouver la mesure de la circonférence nous conduit à la proposition suivante :

La longueur l *d'un arc quelconque* AB *est la limite commune vers laquelle tendent d'une part les périmètres* p, p′, p″... *d'une suite de lignes brisées régulières inscrites telles que* ACDEB *dont les nombres de côtés vont constamment en doublant, et d'autre part les périmètres* P, P′, P″... *d'une suite de lignes brisées circonscrites correspondantes telles que* AFGHKB. *Ceci a lieu d'ailleurs, quel que soit le nombre des côtés de la ligne brisée inscrite initiale* (*fig.* 187).

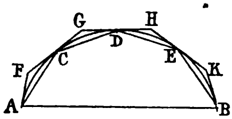


Fig. 187.

Dans cet énoncé, nous avons appelé ligne brisée circonscrite correspondante d'une ligne brisée régulière inscrite la ligne brisée obtenue en menant les tangentes à l'arc par les sommets de la ligne brisée inscrite. Si n est le nombre des côtés de cette dernière, la ligne brisée circonscrite correspondante a $n+1$ côtés, qui sont tous égaux entre eux à l'exception des deux extrêmes qui ne sont que la moitié des autres. La propriété fondamentale exprimée par la proportion

$$\frac{p}{P}=\frac{h}{R},$$

où p et P sont les périmètres de deux lignes correspondantes inscrite et circonscrite, h l'apothème de la première, R l'apothème de la seconde, c'est-à-dire le rayon de l'arc, subsiste alors entièrement, et l'on voit bien par suite que la proposition énoncée ci-dessus se démontrera absolument comme celle du n° **222.**

Pour calculer la longueur l de l'arc, quand on le suppose plus petit qu'une demi-circonférence, on aura alors des formules absolument semblables à celles que nous avons obtenues

au n° **226** pour calculer π; la limite des nombres $\frac{p}{R}, \frac{p'}{R} \ldots$, d'une part, et $\frac{P}{R}, \frac{P'}{R} \ldots$, d'autre part, sera le rapport $\frac{l}{R}$. Connaissant ce rapport, on pourra facilement obtenir la mesure de l'arc en degrés par la formule $n = \frac{180}{\pi} \frac{l}{R}$.

Pour se convaincre que les formules n'ont à subir aucune modification, il suffit de remarquer que les formules du n° **210** s'appliquent aussi bien si a est la corde d'un arc quelconque plus petit qu'une demi-circonférence, au lieu d'être supposé le côté d'un polygone régulier. (On effectuera les calculs en prenant comme ligne inscrite initiale la corde AB elle-même, dont nous appellerons la longueur a, et en faisant en même temps $n = 1$.)

Exemple. — Dans la circonférence dont le rayon est 1 mètre, calculer la longueur de l'arc qui a pour corde $1^m,414214$.

On aura le tableau suivant :

n	$\frac{p}{R}$	$\frac{P}{R}$
1	1,414214	2,000000
2	1,530734	1,656855
4	1,560723	1,591299
8	1,568275	1,575863
16	1,570166	1,572060
32	1,570639	1,571112
64	1,570757	1,570875
128	1,570787	1,570817
256	1,570794	1,570802
512	1,570796	1,570798

On voit alors que l'arc cherché a une longueur de $1^m,570797$ et vaut 90°. Comme nous avions pris le côté du carré pour la corde a, nous devions trouver en effet comme résultat $\frac{\pi}{2}$.

Lorsque le rapport de la corde au rayon est petit, les calculs vont bien plus vite : on peut d'ailleurs se contenter de calculer les nombres $\frac{p}{R}$.

Prenons par exemple $\frac{a}{R} = 0,174311$.

Pour $n = 2$, on a $\frac{p}{R} = 0,174478$; par $n = 4$, il vient

$\frac{p}{R} = 0,174519$ et l'on arrive rapidement à la valeur définitive :

$$\frac{l}{R} = 0,174533;$$

l'arc considéré vaut par suite $10°$.

232. — Proposons-nous maintenant de résoudre la question inverse : *Trouver la corde d'un arc (plus petit que la demi-circonférence) dont on connaît le rayon* R *et la longueur* l.

Soient p et p' les périmètres de deux lignes brisées régulières inscrites dans l'arc considéré et ayant respectivement n et $2n$ côtés. La formule (11) du n° **210** où l'on remplace a par $\frac{p}{n}$ et a' par $\frac{p'}{2n}$ donne :

$$\frac{p}{R} = \sqrt{\left(\frac{p'}{R}\right)^2 - \frac{1}{16n^2}\left(\frac{p'}{R}\right)^4}$$

ou

$$\frac{p}{R} = \frac{p'}{R}\sqrt{1 - \frac{1}{16n^2}\left(\frac{p'}{R}\right)^2}.$$

Connaissant n et $\frac{p'}{R}$, on peut donc calculer $\frac{p}{R}$. Lorsque n est très grand, $\frac{p'}{R}$ est très voisin de $\frac{l}{R}$ qui est connu ; par suite on fera le calcul inverse de celui du n° précédent de la façon suivante :

On cherchera quelle est la plus grande des puissances de 2 qui, mise à la place de n, donne à la quantité

$$\frac{l}{R}\sqrt{1 - \frac{1}{16n^2}\left(\frac{l}{R}\right)^2}$$

une valeur différant de $\frac{l}{R}$ d'au moins une unité du dernier ordre décimal que l'on veut conserver ; soit 2^k cette puissance de 2 ; on calculera alors p_k par la formule

$$\frac{p_k}{R} = \frac{l}{R}\sqrt{1 - \frac{1}{16n^2}\left(\frac{l}{R}\right)^2}$$

où n sera remplacé par 2^k : p_k sera le périmètre de la ligne brisée inscrite de 2^k côtés.

Puis on calculera p_{k-1}, le périmètre de la ligne brisée inscrite de 2^{k-1} côtés, par la formule

$$\frac{p_{k-1}}{R}=\frac{p_k}{R}\sqrt{1-\frac{1}{16n^2}\left(\frac{p_k}{R}\right)^2}$$

où n sera remplacé par 2^{k-1}; et ainsi de suite.

Finalement, on obtiendra :

$$\frac{p_1}{R}=\frac{p_2}{R}\sqrt{1-\frac{1}{64}\left(\frac{p_2}{R}\right)^2}$$

et p_1 sera le périmètre de la ligne brisée inscrite de deux côtés; on en tirera immédiatement la longueur a de la corde cherchée par la formule

$$\frac{a}{R}=\frac{p_1}{R}\sqrt{1-\frac{1}{16}\left(\frac{p_1}{R}\right)^2}.$$

Exemple. — Calculer le rapport $\frac{a}{R}$ pour l'arc de 90°.

Pour cet arc, on a $\frac{l}{R}=\frac{\pi}{2}=1,570796...$

Pour obtenir cinq décimales exactes, gardons-en six pendant le calcul.

On peut prendre $k=8$ et l'on obtient successivement :

$$\frac{p_8}{R}=1,570794; \quad \frac{p_7}{R}=1,570787;$$

$$\frac{p_6}{R}=1,570757; \quad \frac{p_5}{R}=1,570639;$$

$$\frac{p_4}{R}=1,570166; \quad \frac{p_3}{R}=1,568275;$$

$$\frac{p_2}{R}=1,560723; \quad \frac{p_1}{R}=1,530734;$$

et

$$\frac{a}{R}=1,414214.$$

Si l'arc est petit, le calcul sera bien plus rapide. Cherchons par exemple le rapport $\frac{a}{R}$ pour l'arc de 10°.

On a alors $\frac{l}{R}=0,174533$; on peut prendre $k=4$, et l'on a successivement :

$$\frac{p_4}{R}=0,174532; \quad \frac{p_3}{R}=0,174529;$$

$$\frac{p_2}{R}=0{,}174\,519;\quad \frac{p_1}{R}=0{,}174\,478;$$

et finalement : $$\frac{a}{R}=0{,}174\,311.$$

Exercices

1. — Calculer les longueurs des circonférences qui ont pour rayons $1^m,50$; $3^m,95$; $45^m,15$.

Réponse. — $9^m,42$; $24^m,82$; $283^m,69$.

2. — La longueur d'une demi-circonférence est $173^m,74$; quel est son rayon?

Réponse. — $55^m,30$.

3. — Dans une circonférence de 12 mètres de diamètre, quelles sont les longueurs des arcs de 58°; 85°33'; 275°47'55"?

Réponse. — $6^m,07$; $8^m.96$; $28^m,88$.

3. — Dans la même circonference, quelle est la valeur en degrés, minutes et secondes de l'arc qui a pour longueur $7^m,22$?

Réponse. — 68°56'45".

5. — Dans une circonférence de 12 mètres de rayon, quel est l'arc sous-tendu par une corde de 6 mètres?

Réponse. — 28°57'.

6. — Dans la même circonférence, quelle est la longueur de la corde qui sous-tend un arc de 35°?

Réponse. — $7^m,21$.

7. — Dans le cercle de rayon 1 mètre, quelles sont les longueurs des côtés des polygones réguliers convexes de 7, 9, 11, 13, 14 côtés?

Réponse. — $0^m,8678$; $0^m,6840$; $0^m,5635$; $0^m,4788$; $0^m,4448$.

8. — Calculer π en partant du polygone de 30 côtés.

9. — Quelle est la longueur de la circonférence inscrite dans le triangle dont les côtés sont 15 mètres, 14 mètres, 13 mètres?

Réponse. — $12^m,57$.

10. — Quelles sont les longueurs des arcs déterminés par les trois sommets du même triangle sur la circonférence circonscrite?

Réponse. — $19^m,10$; $16^m,88$; $15^m,07$.

11. Connaissant un arc et son rayon, calculer, par un procédé analogue à celui du n° 232, la longueur c de la ligne brisée circonscrite formée en menant les tangentes aux extrémités de l'arc.

Application. — $\frac{l}{R}=1{,}570\,796$.

(On obtient la formule $\frac{P}{R} = \frac{\frac{P'}{R}}{1 - \frac{1}{16n^2}\left(\frac{P'}{R}\right)^2}$ qu'on utilisera comme au n° **232**. Dans le cas particulier donné, le résultat est $\frac{c}{R} = 2$.)

LIVRE IV

LES AIRES

§ 1er. — Les aires des polygones.

233. — On appelle *aire* l'étendue d'une portion limitée de surface. Il y a donc la même différence entre les sens des mots *aire* et *surface* qu'entre les sens des mots *longueur* et *ligne;* d'ailleurs, on confond souvent dans le langage les sens des premiers mots, comme on confond ceux des seconds.

Si deux figures peuvent coïncider, on dit qu'elles sont égales : il est clair que leurs aires sont alors égales.

Si deux figures non égales ont des aires égales, on dit qu'elles sont *équivalentes*.

234. — Pour mesurer les aires, il faut choisir une unité d'aire.

Toutes les fois que l'unité d'aire choisie ne sera pas indiquée d'une façon spéciale, il faudra entendre que l'on adopte pour cette unité l'aire du carré construit sur l'unité de longueur.

La raison de ce choix est la suivante : pour mesurer une aire, il serait peu pratique de la comparer directement à l'unité d'aire : comme le montreront les théorèmes qui suivent, on déduit la mesure de l'aire d'une figure de la mesure de certaines lignes de cette figure, et en adoptant pour unité d'aire l'aire du carré construit sur la longueur qui a servi d'unité pour mesurer ces lignes, les énoncés des théorèmes ainsi que les calculs deviennent très simples.

235. — Si l'on choisit l'un des côtés d'un rectangle pour *base*, l'autre reçoit le nom de *hauteur;* la base et la hauteur d'un rectangle sont les deux *dimensions* du rectangle.

THÉORÈME I

Le nombre qui mesure l'aire d'un rectangle ABCD est le produit des deux nombres qui mesurent les deux dimensions AB, AD de ce rectangle R, à condition que ces deux dimensions soient mesurées avec une même unité de longueur, et que l'on prenne pour unité d'aire le carré construit sur cette unité de longueur (*fig.* 188).

Supposons, par exemple, que les deux dimensions AB, AD du rectangle R soient mesurées par les nombres $\frac{7}{4}$ et $\frac{3}{5}$. Partageons la base AB en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le numérateur du nombre qui la mesure, c'est-à-dire en 7 parties égales, et par les points de division tels que B′ menons des parallèles à la hauteur; partageons de même la hauteur AD en 3 parties égales, et par les points de division tels que D′ menons des parallèles à la base. Le rectangle R se trouve ainsi décomposé en rectangles tels que AB′C′D′; ces rectangles sont tous égaux entre eux; car leurs dimensions, parallèles à AB ou horizontales, sont toutes égales à AB′ d'après la construction et la propriété des parallèles comprises entre parallèles; de même leurs dimensions parallèles à AD ou verticales sont toutes égales à AD′. Quant au nombre de ces rectangles, c'est évidemment 7×3, puisque le rectangle R a été partagé en 7 bandes verticales telles que $AB'B_1'D$, et que chacune de ces bandes contient 3 rectangles tels que le rectangle AB′C′D′, que nous appellerons *r*.

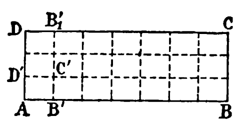


Fig. 188.

Si donc on prenait l'aire du rectangle *r* pour unité d'aire,

l'aire du rectangle R serait mesurée par le nombre 7×3.

Or, les dimensions de r sont respectivement le quart et le cinquième de l'unité de longueur. Considérons alors le carré C construit sur l'unité de longueur, EFGH (*fig.* 189). Divisons la base EF en 4 parties égales, et par les points de division tels que F′ menons des parallèles à la hauteur; partageons de même la hauteur EH en 5 parties égales, et par les points de division tels que H′ menons des parallèles à la base. On décompose ainsi C en rectangles égaux tels que EF′G′H′, dont le nombre est évidemment, en raisonnant comme plus haut, 4×5. Mais les rectangles EF′G′H′ et r sont égaux, d'après la construction, et par suite, si on prenait comme plus haut l'aire du rectangle r pour unité d'aire, l'aire du carré C serait mesurée pour le nombre 4×5.

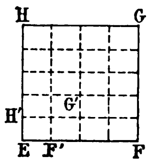


Fig. 189.

Il résulte de là que le rectangle R contient 7×3 fois le rectangle r contenu lui-même 4×5 fois dans le carré C; le nombre qui mesure l'aire de R si on prend l'aire de C pour unité d'aire est donc $\frac{7 \times 3}{4 \times 5}$, c'est-à-dire le produit des deux nombres fractionnaires $\frac{7}{4}$ et $\frac{3}{5}$ qui mesurent les deux dimensions, supposées rapportées à une même unité, c. q. f. d.

La démonstration précédente s'applique dans tous les cas, mais peut quelquefois se simplifier. Si, par exemple, les nombres qui mesurent AB et CD sont tous deux entiers, le rectangle r devient alors le carré C; si ces nombres ont tous deux pour numérateur l'unité, le rectangle r n'est autre que le rectangle R lui-même.

236. Remarque. — En particulier, il résulte du théorème précédent qu'il y a 100 mètres carrés dans un décamètre carré; puisque, si on prend pour unité de longueur le mètre et pour unité d'aire le mètre carré, l'aire du décamètre carré est mesurée par le nombre $10 \times 10 = 100$.

De même il y a 10000 mètres carrés dans un hectomètre carré, etc.

Un mètre carré contient 100^{dmq}, 10000^{cmq}, 1000000^{mmq}.

237. — On énonce d'habitude le théorème précédent sous la forme incorrecte suivante, que l'usage a consacrée :

L'aire du rectangle est égale au produit de ses deux dimensions, ou de sa base par sa hauteur.

Mais, si l'on veut être précis, et si l'on veut se rendre un compte exact du sens que l'on doit attacher à cette proposition, il est tout à fait nécessaire de se reporter à l'énoncé donné en premier lieu.

Exemples. — 1° Les deux dimensions d'un rectangle sont de 3 kilomètres et de 2 centimètres. Quelle est en hectares la surface de ce rectangle?

Prenons d'abord le mètre pour unité de longueur, la surface cherchée, exprimée en mètres carrés, sera $3000 \times 0{,}02 = 60$.

L'hectare contenant 10000^{mq}, la surface cherchée est $0^{Ha},006$.

2° Un rectangle a pour surface 80 centiares, et l'une de ses dimensions est de 2^{mm} ; quelle est l'autre exprimée en kilomètres?

La dimension inconnue est $\dfrac{1}{1000} \times \dfrac{80}{0{,}002} = 40^{Km}$.

238. — Si R est le nombre qui mesure l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont mesurées elles-mêmes par les nombres a et b, on a, sous les conditions du théorème précédent :

$$R = a \times b.$$

On en déduit que deux rectangles sont entre eux comme les produits de leurs deux dimensions, puisque si R′ est un second rectangle de dimensions a' et b', on a :

$$\frac{R}{R'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}.$$

Si les deux rectangles R et R′ ont une dimension commune, $b = b'$ par exemple, ils sont entre eux comme leurs dimensions non communes, puisque alors on peut écrire :

$$\frac{R}{R'} = \frac{a}{a'}.$$

Si un rectangle R est un carré, on a $a = b$, et par suite $R = a^2$: le nombre qui mesure l'aire d'un carré est le carré du nombre qui mesure son côté.

239. — Dans un parallélogramme, on peut choisir l'un quelconque des côtés pour *base;* la *hauteur* est alors la distance de ce côté au côté qui lui est parallèle.

Théorème II

L'aire d'un parallélogramme ABCD a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (*fig.* 190).

Il est bien entendu que cet énoncé n'est vrai que si l'on conserve les conditions de l'énoncé du théorème du n° **232** : nous omettons ces conditions pour abréger le langage, mais il faut toujours les avoir présentes à l'esprit; la même chose aura lieu pour tous les théorèmes suivants.

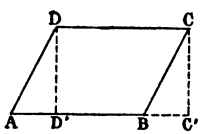


Fig. 190.

Menons des points C et D les perpendiculaires CC′ et DD′ sur la base AB. Les triangles ADD′, BCC′ sont égaux, car ils sont rectangles, et ils ont l'hypoténuse égale (AD = BC comme parallèles comprises entre parallèles) et un côté de l'angle droit égal (DD′ = CC′ pour la même raison).

Le parallélogramme ABCD est la somme du trapèze BCDD′ et du triangle ADD′; le rectangle CDC′D′ est la somme du même trapèze BCDD′ et du triangle BCC′ égal au précédent. Il résulte clairement de là que le parallélogramme considéré est équivalent au rectangle CDC′D′; or, l'aire de ce dernier a pour mesure le produit

de ses deux dimensions CD, CC′ qui sont égales respectivement à la base AB du parallélogramme et à sa hauteur; l'aire du parallélogramme a donc elle-même pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, c. q. f. d.

240. — Si P est l'aire du parallélogramme, et si b et h représentent sa base et sa hauteur, on a :

$$P = b \times h;$$

on en déduit des propositions analogues à celles que nous avons déduites au n° **238** de la formule $R = a \times b$.

Théorème III

241. — L'aire d'un triangle ABC a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur (*fig.* 191).

Soit BC le côté choisi pour base, AH la hauteur correspondante.

Par A et C menons les droites AD, CD respectivement parallèles à BC et AB. On forme ainsi un parallélogramme ABCD et les deux triangles ABC, ACD sont égaux comme ayant les côtés égaux chacun à chacun. L'aire du triangle ABC est donc égale à celle du triangle ACD, et par suite, est la moitié de l'aire du parallélogramme ABCD. Or, ce parallélogramme a pour base BC et pour hauteur AH comme le triangle donné; son aire est donc mesurée par le produit $BC \times AH$, et par suite l'aire du triangle ABC est mesurée par la moitié de ce produit : $\frac{1}{2} BC \times AH$, c. q. f. d.

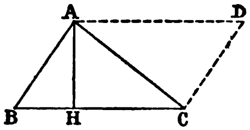


Fig. 191.

242. — Si S est l'aire du triangle, a sa base, h sa hauteur, on a :

$$S = \frac{1}{2} ah,$$

ce que l'on peut écrire aussi, si cela est plus commode :

$$S = \frac{a}{2} \times h = a \times \frac{h}{2}.$$

On déduira de ces formules des conséquences analogues à celles du n° **235** ; en particulier on voit que :

Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents;

Deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs;

Deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Exemple. — Quelle est la surface du triangle équilatéral en fonction de son côté a?

H est alors le milieu de BC, et l'on a, dans le triangle rectangle ABH :

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}};$$

par suite :

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2}a \times \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Si, par exemple, le côté a un mètre de longueur, la surface est $0^{mq},4330$.

243. — Cherchons à exprimer la surface d'un triangle en fonction de ses trois côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. On a d'après le n° **187** :

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ où } 2p = a + b + c;$$

on a donc :

$$S = \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

La quantité désignée au n° **187** par S est donc précisément la surface du triangle; cette remarque permettra d'énoncer sous une forme facile à retenir le résultat du n° **188**.

Exemple. — Si $a = 15^m$, $b = 14^m$, $c = 13^m$; il vient $S = 84^{mq}$.

Soient I, I', I''' les centres des cercles inscrit et exinscrits

au triangle ABC, et r, r', r'', r''' les rayons de ces cercles (*fig.* 192).

Les triangles BIC, CIA, AIB ont respectivement pour bases a, b, c et ont pour hauteur commune r; d'ailleurs leur somme est équivalente au triangle ABC; on a donc :

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = p.r,$$

et par suite

$$r = \frac{S}{p}.$$

De même les triangles BI'C, CI'A, AI'B ont respectivement pour bases a, b, c et pour hauteur commune r'; d'ailleurs la somme des deux derniers diminuée du premier est équivalente au triangle ABC; on a donc :

$$S = \frac{br'}{2} + \frac{cr'}{2} - \frac{ar'}{2} = r'\left(\frac{b+c-a}{2}\right) = (p-a)r'.$$

et par suite

$$r' = \frac{S}{p-a}.$$

On aurait de même :

$$r'' = \frac{S}{p-b}, \quad r''' = \frac{S}{p-c}.$$

On peut donc calculer aisément les valeurs de r, r', r'', r''', connaissant a, b, c.

Exemple. — Soit $a = 15^{m}$, $b = 14^{m}$, $c = 13^{m}$; on aura :

$$r = 4^{m},\ r' = 14^{m},\ r'' = 12^{m},\ r''' = 10^{m},5.$$

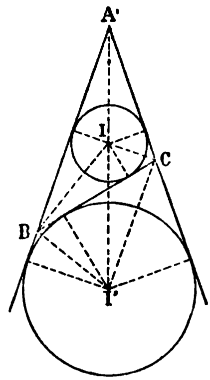


Fig. 192.

A cause de la valeur de S, on voit encore que l'on peut écrire :

$$S = \sqrt{r.r'.r''.r'''}.$$

244. — Si un triangle est rectangle, sa surface est mesurée par la moitié du produit des deux côtés b, c de l'angle droit ou par la moitié du produit de l'hypoténuse a

par la hauteur h relative à l'hypoténuse ; on a donc l'égalité déjà obtenue (183) :

$$bc = ah.$$

245. — Considérons un losange ABCD (*fig.* 193). Les diagonales AC, BD sont perpendiculaires l'une sur l'autre et se coupent mutuellement en parties égales ; soient d et d' les longueurs de ces diagonales. Chacun des triangles rectangles AOB, BOC, COD, DOA a pour mesure :

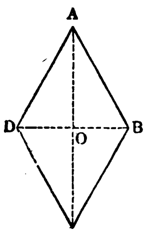


Fig. 193.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d'}{2} = \frac{1}{8} dd',$$

et par suite le losange, qui est équivalent à la somme de ces quatre triangles, a pour mesure $\frac{1}{2} dd'$. Ainsi : *La surface d'un losange a pour mesure la moitié du produit des deux diagonales.*

Cette propriété peut s'appliquer en particulier au carré, ce qui en fournit une facile vérification.

Théorème IV

246. — L'aire d'un trapèze ABCD a pour mesure la moitié du produit de la somme des bases par sa hauteur (*fig.* 194).

Menons la diagonale AC ; le trapèze est équivalent à la somme des deux triangles ABC, ACD ; le premier a pour base AB et pour hauteur CC′, hauteur du trapèze ; le second a pour base CD et pour hauteur AA′ qui est aussi la hauteur du trapèze. Si donc on désigne par T l'aire du trapèze, par b et b' les deux bases AB, CD et par h la hauteur, on a :

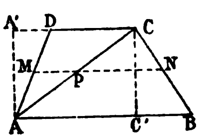


Fig. 194.

$$T = \frac{1}{2} bh + \frac{1}{2} b'h = \frac{1}{2}(b + b')h, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — La parallèle aux bases menée par le milieu P de AC passe par les milieux M et N de AD et de BC (153); et les triangles semblables formés donnent :

$$NP = \frac{AB}{2}, \quad MP = \frac{CD}{2};$$

on a donc :

$$MN = MP + NP = \frac{b + b'}{2},$$

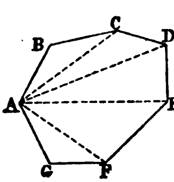
et par suite :

$$T = MN \times h.$$

La surface d'un trapèze est donc égale au produit de la hauteur par la droite qui joint les milieux des deux côtés non parallèles.

Cet énoncé s'applique au triangle en supposant nulle l'une des bases.

247. — Supposons maintenant qu'il s'agisse de mesurer l'aire d'un polygone quelconque ABCDEFG. A cet effet, on le décomposera en portions qu'on sache mesurer; on pourra, par exemple, le décomposer en triangles, soit par des diagonales issues ou non d'un même sommet (*fig.* 195



F . 195.

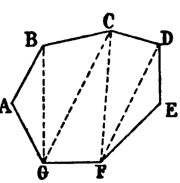


Fig. 196.

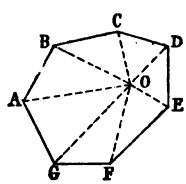


Fig. 197.

et 196), soit en joignant ses sommets à un point quelconque O situé dans l'intérieur du polygone (*fig.* 197). Il suffit de faire la somme des aires des triangles partiels ainsi formés pour obtenir l'aire du polygone.

On pourra d'ailleurs, dans le dernier cas, choisir le point O à l'extérieur du polygone (*fig.* 198) : l'aire du polygone sera alors la différence entre la somme des aires

des triangles tels que OAB, OBC, OCD, ODE et la somme des aires des triangles tels que OEF, OFG, OGA.

Supposons, par exemple, que le polygone soit tel qu'il existe un cercle qui lui soit inscrit, c'est-à-dire qui lui soit

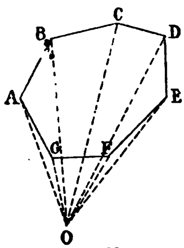


Fig. 198.

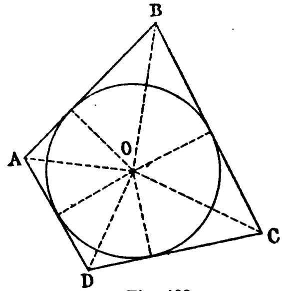


Fig. 199.

intérieur et qui soit tangent à tous ses côtés. Soit ABCD le polygone et O le centre du cercle inscrit de rayon r (*fig.* 199). Le polygone est équivalent à la somme des triangles OAB, OBC, OCD, ODA qui ont pour bases les côtés du polygone et pour hauteur commune le rayon r; sa surface est donc :

$$\frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)r,$$

c'est-à-dire, d'une façon générale, *la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit.*

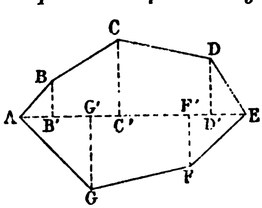


Fig. 200.

Nous avons d'ailleurs déjà rencontré ce théorème dans le cas du triangle (**243**). On obtiendrait un résultat analogue facile à énoncer s'il existait un cercle exinscrit au polygone.

248. — On peut encore décomposer le polygone en portions mesurables de bien d'autres façons. Traçons la plus grande diagonale AE et menons les perpendiculaires BB', CC', DD', FF', GG' sur cette diagonale (*fig.* 200). Le poly-

gone sera alors équivalent à la somme des triangles rectangles ABB′, EDD′, EFF′, AGG′ et des trapèzes rectangles BB′CC′, CC′DD′, FF′GG′; il suffira donc, pour obtenir son aire S, de connaître les longueurs BB′, CC′, DD′, FF′, GG′ des perpendiculaires et les segments successifs AB′, B′G′, G′C′, C′F′, F′D′, D′E qu'elles déterminent sur la diagonale AE : on aura alors :

$$S=\frac{1}{2}AB'\times BB'+\frac{1}{2}B'C'(BB'+CC')+\frac{1}{2}C'D'(CC'+DD')$$
$$+\frac{1}{2}D'E\times DD'+\frac{1}{2}F'E\times FF'+\frac{1}{2}F'G'(FF'+GG')$$
$$+\frac{1}{2}AG'\times GG'$$
$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}BB'(AB'+B'C')+CC'(B'C'+C'D')+DD'(C'D'\\ +D'E)+FF'(F'E+F'G')+GG'(F'G'+AG')\end{array}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}BB'\times AC'+CC'\times B'D'+DD'\times C'E+FF'\times EG'\\ \qquad +GG'\times AF'.\end{array}\right]$$

Si, par exemple, on suppose :

$BB'=5^m,2$, $CC'=11^m,5$, $DD'=7^m,4$, $FF'=8^m,6$, $GG'=9^m,7$, $AB'=2^m,1$, $B'G'=2^m,3$, $G'C'=2^m,7$, $C'F'=4^m,6$, $F'D'=1^m,3$, $D'E=2^m,2$,

on aura, en mètres carrés :

$$S=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}5,2\times 7,1+11,5\times 10,9+7,4\times 8,1\\ \quad +8,6\times 10,8+9,7\times 11,7\end{array}\right]=214,29.$$

On peut encore, plus généralement, projeter tous les sommets sur une droite quelconque XX′ en A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′ (*fig.* 201) : l'aire S du polygone est alors égale à la somme des aires des trapèzes rectangles tels que ABA′B′, BCB′C′, CDC′D′, DED′E′, diminuée de la somme des aires des trapèzes rectangles tels que AA′GG′, GG′FF′, FF′EE′; il suffira donc

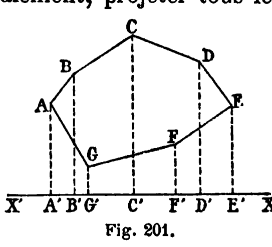


Fig. 201.

de connaître les longueurs des perpendiculaires AA′, BB′..., et les segments successifs A′B′, B′G′..., qu'elles déterminent sur la droite XY, et l'on aura :

$$S = \frac{1}{2}[A'B'(AA'+BB')+B'C'(BB'+CC')$$
$$+C'D'(CC'+DD')+D'E'(DD'+EE')-A'G'(AA'+GG')$$
$$-G'F'(GG'+FF')-F'E'(FF'+EE')]$$
$$=\frac{1}{2}[BB'\times A'C'+CC'\times B'D'+DD'\times C'E'-AA'\times B'G'$$
$$-GG'\times A'F'-FF'\times G'E'-EE'\times F'D']$$

Si, par exemple, on suppose :

$AA'=12^m$, $BB'=17^m,2$, $CC'=23^m,5$, $DD'=19^m,4$, $EE'=12^m$, $FF'=3^m,4$, $GG'=2^m,3$, $A'B'=2^m,1$, $B'G'=2^m,3$, $G'C'=2^m,7$, $C'F'=4^m,6$, $F'D'=1^m,3$, $D'E'=2^m,2$,

on aura en mètres carrés :

$$S=\frac{1}{2}[17,2\times 7,1\times 23,5\times 10,9+19,4\times 8,1-12\times 2,3$$
$$-2,3\times 11,7-3,4\times 10,8-12\times 1,3]=214,29.$$

On aura des formules analogues dans tous les cas de figure possibles.

Exercices

1\. — Une lame de parquet a la forme d'un parallélogramme : les côtés ont pour longueur 64^{cm} et 9^{cm}; l'un des angles du parallélogramme est de 45°. Combien faudra-t-il de pareilles lames pour parqueter une chambre rectangulaire ayant $5^m,25$ de long et $3^m,15$ de large?

Réponse. — 390.

2\. — Dans un trapèze ABCD, on connaît les bases et la hauteur. Les côtés non parallèles AD, BC se coupent en O. Evaluer l'aire des triangles AOB, COD; en déduire l'aire du trapèze.

3 — L'aire du trapèze est égale au produit d'un de ses côtés non parallèles par la perpendiculaire abaissée sur lui du milieu du côté opposé.

4\. — Soit G le point de concours des médianes d'un triangle ABC; les triangles ABG, ACG, BCG sont équivalents.

5. — Un champ a la forme d'un triangle ABC dont les côtés ont pour longueurs $AB = 60^m,5$; $AC = 52^m,4$; $BC = 45^m$. On demande : 1° de calculer la surface de ce triangle ; 2° de trouver dans son intérieur un point O tel que les triangles AOB, AOC, BOC soient équivalents. On calculera les distances du point aux trois côtés du triangle.

Réponse. — 1° $1145^m,84...$; 2° $12^m,62...$; $14^m,57...$; $16^m,97...$

6. — Les deux triangles qu'on forme en joignant un point pris dans l'intérieur d'un parallélogramme aux extrémités de deux côtés opposés, ont une somme équivalente à la moitié du parallélogramme.

Cas où le point est extérieur au parallélogramme.

7. — Soit P un point pris dans le plan d'un parallélogramme ABCD ; le triangle PAC est équivalent à la somme ou à la différence des triangles PAB et PAD suivant la position du point P.

8. Si dans un quadrilatère convexe les deux diagonales sont rectangulaires, l'aire de ce quadrilatère est égale à la moitié du produit des deux diagonales.

9. — Dans un triangle rectangle ABC, on a, en appelant a l'hypoténuse, b et c les côtés de l'angle droit, p le demi-périmètre et S la surface :

$$S = p\,(p-a) = (p-b)\,(p-c).$$

10. — Calculer les côtés et la surface d'un triangle dont on connaît les trois hauteurs h, h', h''. Application :

$$h = 0^m,25,\ h' = 0^m,20,\ h'' = 0^m,125.$$

(Le triangle cherché est semblable au triangle dont les côtés seraient mesurés par $\frac{1}{h}, \frac{1}{h'}, \frac{1}{h''}$. — On en déduit tout de suite :

$$a = \frac{2}{h}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}\right)\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h'}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}-\frac{1}{h''}\right)}}.)$$

Réponse. — $0^m,24$; $0^m,30$; $0^m,48$; $0^{mq},03$.

11. — Quel est le lieu géométrique des sommets des triangles qui ont une base donnée et une aire donnée ?

12. — Deux triangles ont un sommet variable commun, et les côtés opposés sont fixes. Quel est le lieu géométrique du sommet lorsque la somme ou la différence des aires des deux triangles conserve une valeur donnée ?

13. — Le triangle formé en joignant les milieux de trois côtés consécutifs d'un quadrilatère convexe est équivalent au quart de ce quadrilatère. En déduire que si a, b, c, d sont les

quatre côtés consécutifs du quadrilatère, m et n ses diagonales, l'aire est donnée par la formule

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}.$$

14. — Si le quadrilatère est inscriptible, la formule précédente devient :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}.$$

15. — Si le quadrilatère est à la fois inscriptible et circonscriptible, la formule précédente devient :

$$S = \sqrt{abcd}.$$

16. Si le quadrilatère est un trapèze de bases a et c, on a :

$$S = \frac{1}{4}\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(b+c+d-a)(a+b+d-c)(a-c+b-d)(a-c+d-b)}.$$

17. — On construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle rectangle, extérieurement à ce triangle, et on joint les sommets consécutifs de ces carrés. Quelle est la surface totale de la figure ainsi formée?

Réponse. — $2(b^2 + bc + c^2)$.

18. — Si deux triangles ont un angle égal ou supplémentaire, leurs aires sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.

(On comparera les deux triangles avec un triangle auxiliaire ayant une hauteur commune avec chacun d'eux.)

§ 2. — Les aires des polygones réguliers et du cercle.

Théorème V

249. — L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par l'apothème.

Ce théorème résulte immédiatement de la remarque faite à la fin du n° **247**, puisque le polygone est circonscrit à un cercle dont le rayon est précisément l'apothème (**205**).

Si h est l'apothème et p le périmètre, on a donc pour l'aire S du polygone la formule :

$$S=\frac{1}{2}p.h.$$

Si n est le nombre des côtés du polygone et a le côté, on a encore :

$$S=\frac{n}{2}ah.$$

Exemple. — Dans le dodécagone régulier, on a en fonction du rayon R du polygone :

$$a=R\sqrt{2-\sqrt{3}},\qquad h=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}};$$

par suite :

$$S=3R^2\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
$$=3R^2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=3R^2\sqrt{4-3}=3R^2.$$

250. — Si l'on considère un second polygone régulier ayant le même nombre de côtés, et par suite semblable au précédent, dont le périmètre soit p' et l'apothème h', sa surface S' sera :

$$S'=\frac{1}{2}p'h'.$$

On aura donc :

$$\frac{S}{S'}=\frac{p}{p'}\times\frac{h}{h'};$$

mais d'après un théorème connu $\frac{p}{p'}$ et $\frac{h}{h'}$ sont égaux tous deux au rapport de similitude des deux polygones qui est encore égal au rapport des rayons et au rapport des côtés. On peut donc dire que *le rapport des aires de deux polygones réguliers semblables est égal au carré du rapport de similitude de ces deux polygones, c'est-à-dire au carré du rapport de leurs rayons, ou de leurs apothèmes, ou de leurs côtés, ou de leurs périmètres.*

Théorème VI

251. — L'aire K d'un cercle O a pour mesure la moitié du produit de sa circonférence C par son rayon R (*fig.* 202).

Considérons une série de polygones réguliers inscrits dans la circonférence dont les nombres de côtés aillent constamment en doublant; soient s, s', s''..., les surfaces de ces polygones, p, p', p''..., leurs périmètres, h, h', h''..., leurs apothèmes. On a :

$$s = \frac{1}{2}ph, \quad s' = \frac{1}{2}p'h', \quad s'' = \frac{1}{2}p''h''...$$

Les quantités s, s', s''..., vont manifestement en croissant constamment, et restent plus petites que K; comme les périmètres p, p', p''..., tendent vers la longueur C de la circonférence en même temps que les apothèmes h, h', h''... tendent vers le rayon R (221), il en résulte que les quantités s, s', s''... tendent vers la limite $\frac{1}{2}$ CR.

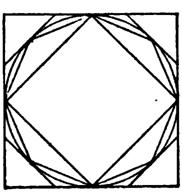


Fig. 202.

Considérons de même une série de polygones réguliers circonscrits semblables aux précédents; soient S, S', S''..., les surfaces de ces polygones, et P, P', P''..., leurs périmètres; on a :

$$S = \frac{1}{2}PR, \quad S' = \frac{1}{2}P'R, \quad S'' = \frac{1}{2}P''R...$$

Les quantités S, S', S''..., vont manifestement en décroissant constamment et restent supérieures à K; comme les périmètres P, P', P''... tendent vers C, ces quantités ont aussi pour limite $\frac{1}{2}$ CR.

La quantité K étant toujours comprise entre deux quan-

tités correspondantes des suites s, s', s''... et S, S', S''... et ces deux suites ayant la même limite $\frac{1}{2}$ CR, il en résulte nécessairement l'égalité :

$$K=\frac{1}{2}CR, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

252. — Si l'on remarque que

$$C=2\pi R,$$

il en résulte

$$K=\pi R^2$$

et aussi :

$$K=\frac{C^2}{4\pi}.$$

Ces formules permettront de calculer la surface d'un cercle, connaissant son rayon ou sa circonférence; les problèmes inverses seront résolus par les formules :

$$R=\sqrt{\frac{K}{\pi}}, \qquad C=2\sqrt{\pi K}.$$

Ces formules nous montrent encore que les aires de deux cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons ou de leurs circonférences.

Exemples. — 1° Quelle est la surface d'une pièce de 5 francs en argent, sachant que son diamètre est $0^m,037$?

La surface en centimètres carrés sera :

$$\pi\frac{\overline{3,7}^2}{4}=10,75.$$

2° Quelle est, en kilomètres carrés, la surface d'un méridien terrestre?

On a :

$$K=\frac{(40000)^2}{4\pi}=127323954.$$

3° Quel est le rayon du cercle dont la surface est de 1^{mq}?

En mètres, on a :

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = \sqrt{0,318310} = 0^{m},564...$$

4° Quelle est la circonférence d'un bassin circulaire qui a 100^{mq} de surface?

En mètres, on a :

$$C = 2\sqrt{314,1593} = 35^{m},45...$$

253. — On appelle *secteur circulaire* la portion de cercle comprise entre un arc ACB et les deux rayons OA, OB qui aboutissent à ses extrémités (*fig.* 203). Si on inscrit dans le secteur une ligne brisée régulière ACDB, le polygone OACDB est un *secteur polygonal régulier* inscrit dans le secteur circulaire.

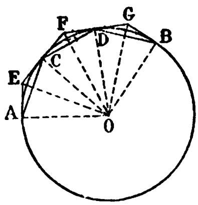


Fig. 203.

Il est évident que l'aire d'un secteur polygonal régulier OACDB a pour mesure la moitié du produit du périmètre de la ligne brisée ACDB par son apothème : car ce secteur est décomposable en triangles tels que OAC, OCD, ODB qui ont pour bases les différents côtés de la ligne brisée inscrite ACDB et pour hauteur commune l'apothème de cette ligne. Si, en même temps que la ligne brisée régulière inscrite ACDB, on considère la ligne brisée circonscrite correspondante (**231**) AEFGB, le polygone OAEFGB sera le secteur polygonal circonscrit correspondant au secteur polygonal régulier inscrit ACDB. Comme plus haut, il est clair que l'aire du secteur polygonal circonscrit OAEFGB a pour mesure la moitié du produit du périmètre de la ligne brisée AEFGB par le rayon de la circonférence O : car ce secteur est décomposable en triangles tels que OAE, OEF, OFG, OGB qui ont pour bases les différents côtés de la ligne brisée AEFGB et pour hauteur commune le rayon de la circonférence.

Théorème VII

254. — L'aire d'un secteur circulaire a pour mesure la moitié du produit de l'arc qui le limite par son rayon.

Ce théorème se démontrera d'une façon absolument identique au théorème du n° **251**, grâce à ce que nous avons dit au n° **231** sur la longueur d'un arc quelconque.

Si R est le rayon et l la longueur de l'arc, on a donc, en désignant par S l'aire du secteur :

$$S=\frac{1}{2}lR;$$

si n est la mesure de l'arc en degrés et fractions de degré, on a d'ailleurs :

$$l=\frac{\pi Rn}{180}$$

et par suite :

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360},$$

formule qui permettra de calculer l'une des trois quantités S, R, n, connaissant les deux autres.

On voit que deux secteurs d'un même cercle sont proportionnels à leurs arcs; cette proportion peut être démontrée directement sans aucune difficulté, et l'on arriverait ainsi à déduire l'aire du secteur de celle du cercle supposée connue.

On voit encore que dans deux cercles différents, les aires de deux secteurs dont les arcs sont mesurés par le même nombre de degrés sont proportionnelles aux carrés des rayons.

Exemples. — 1° Quelle est l'aire du secteur de 10° dans le cercle dont le rayon est 1 mètre?

On a en mètres carrés :

$$S=\frac{\pi}{36}=0^{mq},0872665.$$

2° Quel est le secteur dont la surface est égale au carré du rayon?

En degrés, sa mesure est :

$$n=\frac{360}{\pi}=360\times0{,}318309886\ldots$$
$$=\quad 114°35'29'',612\ldots$$

255. — On appelle *segment de cercle* la portion du cercle comprise entre un arc AMB et sa corde AB (*fig.* 204).

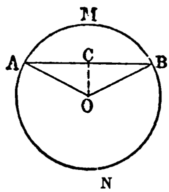


Fig. 204.

L'aire du segment AMB, plus petit qu'un demi-cercle, est la différence des aires du secteur OAMB, et du triangle AOB.

Si S est l'aire du segment, l la longueur de l'arc AMB, a la corde AB, R le rayon du cercle, on a donc, en désignant par h la hauteur OC du triangle AOB ;

$$S=\frac{1}{2}lR-\frac{1}{2}ah,$$

et comme le triangle rectangle AOC donne :

$$h=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}},$$

il vient :

$$S=\frac{1}{2}lR-\frac{1}{2}a\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}.$$

Si n est la mesure en degrés de l'arc AMB, on peut écrire :

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360}-\frac{1}{2}a\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}.$$

Si, au lieu du segment AMB, on considérait le segment ANB plus grand qu'un demi-cercle, on évaluerait son aire en faisant la somme des aires du secteur ANB et du triangle AOB.

Exemples. — 1° Quelle est l'aire du segment déterminé par un arc de 60° dans le cercle dont le rayon est 1 mètre?

En mètres carrés on a :

$$S=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}},$$

puisque la corde de l'arc de 60° est égale au rayon.
On trouve donc :

$$S=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0^{mq},0906.$$

2° Même question pour le segment déterminé par un arc de 10°?

La corde de ce segment est (232) $0^{m},174311$; par suite, en mètres carrés :

$$\begin{aligned}S&=\frac{\pi}{36}-0,087155+\sqrt{1-(0,087155)^2}\\&=0,087266-0,086824\\&=0^{mq},000442.\end{aligned}$$

Exercices

1. — Calculer à moins d'un centimètre carré les aires des polygones réguliers de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 30 côtés inscrits dans une circonférence qui a 1 mètre de rayon.

2. — Même question pour les polygones circonscrits correspondants.

3. — En partant du théorème qui donne l'aire du cercle, établir une méthode pour calculer π analogue à celle qui a été donnée antérieurement. L'appliquer au calcul de π en partant soit du carré, soit de l'hexagone, soit du pentagone.

4. — Un polygone irrégulier a pour surface 425 mètres carrés et pour périmètre 179 mètres; il est de plus circonscrit à un cercle; trouver l'aire de ce cercle.

Réponse. — $70^{mq},84$.

5. — Une couronne circulaire plane a une largeur égale à 2 mètres; on sait de plus que le rapport de la surface de cette couronne à la surface du cercle qui a une circonférence moyenne arithmétique entre celles qui comprennent la couronne

est égal à 2. Calculer les rayons des deux circonférences qui limitent la couronne.

Réponse. — 3 mètres et 1 mètre.

6. — On décrit sur l'hypoténuse BC d'un triangle ABC un demi-cercle qui passe en A et sur les deux côtés de l'angle droit des demi-cercles extérieurs au triangle. La somme des portions de ces deux derniers demi-cercles qui sont extérieurs au premier est équivalente au triangle considéré.

7. — Soit un cercle O de rayon R; d'un point P extérieur et à la distance a du centre on mène les tangentes PA, PB. Quelle est l'aire du triangle mixtiligne PAB?

(La corde AB a pour longueur $\frac{2R}{a}\sqrt{a^2 - R^2}$; si l est l'arc correspondant, la surface cherchée sera $R\sqrt{a^2 - R^2} - \frac{Rl}{2}$).

Application. — On a $a = 2R$. La surface est

$$R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}685.R^2.$$

8. — Calculer la surface des triangles mixtilignes formés par les côtés d'un triangle équilatéral de côté a et le cercle inscrit.

Réponse. — $\frac{a^2}{12}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

9. — Calculer la surface des segments compris entre les côtés d'un triangle équilatéral de côté a et le cercle circonscrit.

Réponse. — $\frac{a^2}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

10. — Si deux cercles sont orthogonaux, leur somme est équivalente au cercle qui a la distance des centres pour rayon.

§ 3. — La comparaison des aires.

Théorème VIII

256. — Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport de similitude de ces deux polygones.

Considérons d'abord deux triangles semblables ABC, A'B'C' dont les hauteurs sont AH et A'H' et les aires T et T' (*fig.* 205). On a :

$$T = \frac{1}{2} BC \times AH, \quad T' = \frac{1}{2} B'C' \times A'H',$$

d'où

$$\frac{T}{T'} = \frac{BC \times AH}{B'C' \times A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'}.$$

Les triangles rectangles ABH, A′B′H′ sont semblables comme ayant les angles aigus en B et B′ égaux : ces angles sont en effet homologues dans les triangles semblables ABC, A′B′C′. On a donc :

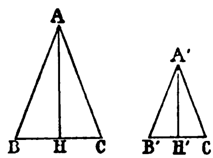


Fig. 205.

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'},$$

et par suite :

$$\frac{T}{T'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AB}{A'B'}.$$

Mais chacun des rapports $\frac{BC}{B'C'}$, $\frac{AB}{A'B'}$ est, par définition, égal au rapport r de similitude des deux triangles, on a donc finalement :

$$\frac{T}{T'} = r^2, \text{ c. q. f. d.}$$

Envisageons maintenant deux polygones semblables quelconques; on peut les décomposer en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés, et le rapport de similitude de deux triangles correspondants dans ces deux séries de triangles semblables est égal au rapport de similitude r des deux polygones (**170**). Soient T_1, T_2, T_3..., les aires des triangles de la première série, T_1', T_2', T_3'..., les aires des triangles correspondants de la seconde série; d'après ce qui précède, on a :

$$\frac{T_1}{T'_1} = r^2, \quad \frac{T_2}{T'_2} = r^2, \quad \frac{T_3}{T'_3} = r^2 \ldots;$$

d'après une propriété connue de la théorie des rapports, on en tire :

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots}{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \ldots} = r^2,$$

et comme les sommes $T_1+T_2+T_3+\ldots$, $T'_1+T'_2+T'_3+\ldots$ sont respectivement les aires des deux polygones considérés, le théorème est démontré.

En vertu de la définition du rapport de similitude de deux polygones semblables, on énonce souvent ce théorème sous la forme suivante : *Deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.*

Remarque. — Nous avons déjà rencontré un cas particulier du théorème que nous venons de démontrer quand nous nous sommes occupés des polygones réguliers (**250**).

257. Application. — *Dans deux cercles* O *et* O′ *de rayons différents* R *et* R′, *les aires de deux segments limités par deux arcs* AMB, A′M′B′ *mesurés par le même nombre de degrés sont proportionnelles aux carrés des rayons correspondants* (*fig.* 206).

On a en effet :

Seg. AMB = sect. OAMB — tr. OAB
Seg. A′M′B′ = sect. O′A′M′B′ — tr. O′A′B′;

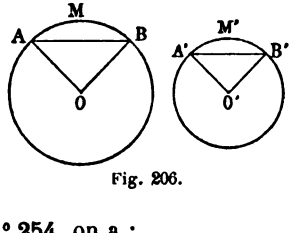


Fig. 206.

or, d'après le n° **254**, on a :

$$\frac{\text{Sect. OAMB}}{\text{Sect. O'A'M'B'}} = \frac{R^2}{R'^2};$$

en outre, les angles AOB, A′O′B′ sont égaux, et par suite

les triangles isocèles OAB, O'A'B' sont semblables, de sorte que l'on a, d'après le théorème précédent :

$$\frac{\text{tr. AOB}}{\text{tr. A'O'B'}} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A'}^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

D'après une propriété connue de la théorie des rapports, on en tire :

$$\frac{\text{Segm. AMB}}{\text{Segm. A'M'B'}} = \frac{R^2}{R'^2}, \text{ c. q. f. d.}$$

258. — Les résultats que nous avons obtenus en étudiant la mesure de l'aire d'un rectangle et en particulier d'un carré vont nous permettre d'énoncer sous une forme différente et peut-être plus géométrique la plupart des théorèmes que nous avons démontrés aux §§ 3 et 4 du livre III.

Remarquons d'abord que dire qu'une droite A est moyenne proportionnelle entre deux droites B et C est la même chose que dire que le carré construit sur la droite A est équivalent au rectangle qui a pour dimensions les droites B et C. De même, dire qu'entre quatre lignes A, B, C, D existe la proportion $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ est la même chose que dire : le rectangle qui a pour dimensions les lignes B et C est équivalent au rectangle qui a pour dimensions les droites A et D.

Entre autres théorèmes, nous pourrons donc énoncer les suivants :

Le carré construit sur la somme (ou la différence) de deux longueurs est équivalent à la somme des carrés construits sur ces deux longueurs augmentée (ou diminuée) de deux fois le rectangle qui a ces deux longueurs pour dimensions (**173**).

Le rectangle qui a pour dimensions la somme et la différence de deux longueurs est équivalent à la différence des carrés construits sur ces deux longueurs (**173**).

Dans un triangle rectangle ABC, *le carré construit sur*

la hauteur AD *issue du sommet de l'angle droit est équivalent au rectangle qui a pour dimensions les deux segments* BD *et* CD (180).

Dans un triangle rectangle ABC, *le carré construit sur un côté* AB *de l'angle droit est équivalent au rectangle qui a pour dimensions l'hypoténuse* BC *et le segment* BD, *projection de* AB *sur* BC (180).

Dans un triangle rectangle ABC, *le carré construit sur l'hypoténuse* BC *est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit* (182).

Dans un triangle quelconque ABC, *le carré construit sur un côté* AC *opposé à un angle aigu* (*ou obtus*) *est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, diminuée* (*ou augmentée*) *de deux fois le rectangle qui a pour dimensions l'un de ces côtés,* BC, *et la projection* BD *de l'autre sur lui* (184, 185).

259. — La plupart de ces théorèmes, tels que nous venons de les énoncer, sont susceptibles d'une démonstration directe. Nous démontrerons simplement le suivant :

Théorème IX

Dans un triangle rectangle ABC, le carré BCEF construit sur l'hypoténuse BC est équivalent à la somme des carrés ABGH, ACIK construits sur les deux côtés de l'angle droit (*fig.* 207).

Remarquons d'abord que l'angle en A étant droit, AG est le prolongement de AC et AI le prolongement de AB. Soit AD la perpendiculaire menée de A sur l'hypoténuse, et R le point où elle coupe EF. Nous allons démontrer que les carrés ABGH, ACIK sont respectivement équivalents aux rectangles BDER, CDFR : le théorème en résultera immédiatement (et en même temps, la deuxième partie du théorème du n° 180).

Démontrons, par exemple, l'équivalence du carré ABGH et du rectangle BDER. Menons les droites AE et CH. Les triangles ABE, CBH ont les angles en B égaux, comme

formés d'une partie commune, l'angle ABC, et d'un angle droit, l'angle CBE ou l'angle ABH ; en outre, les côtés BE et BC sont égaux comme côtés d'un carré, les côtés AB et BH sont égaux pour une raison analogue. Les deux triangles considérés ayant un angle égal compris entre deux côtés opposés chacun à chacun sont égaux. D'autre part, le triangle ABE a pour base BE comme le rectangle BDER ; sa hauteur AP est égale à la hauteur de ce rectangle : on en déduit immédiatement, d'après la mesure de l'aire du triangle, que le rectangle BDER est équivalent à deux fois le triangle ABE. De même le triangle CBH a pour base BH comme le carré ABHG, et sa hauteur CQ est égale à la hauteur de ce carré : le carré ABGH est donc équivalent à deux fois le triangle CBH. Mais les triangles ABE, CBH sont égaux, et par suite équivalents : il en est donc de même du rectangle BDER et du carré ABGH, c. q. f. d.

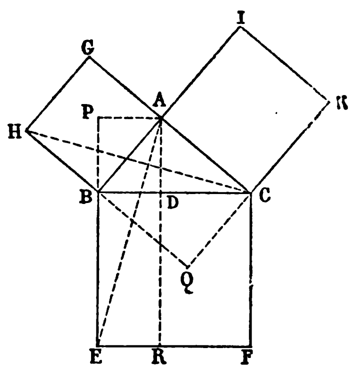


Fig. 207.

§ 4. — Problèmes et constructions graphiques.

Problème I

260. — Construire un triangle équivalent à un polygone donné.

Il suffit évidemment de résoudre la question suivante : Etant donné un polygone quelconque ABCDEF, trouver un polygone qui lui soit équivalent et qui ait un côté de moins (*fig.* 208). L'application répétée de la construction

que nous allons indiquer permettra d'arriver finalement à un triangle équivalent au polygone donné. Menons une diagonale AE qui détache du polygone un triangle AEF; par F menons une parallèle à AE qui coupe AB en G, et menons EG.

Le polygone GBCDE a un côté de moins que le polygone donné et lui est équivalent; pour le faire voir, il suffit évidemment de montrer l'équivalence des triangles AEF, AEG. Or ces triangles ont même base AE et même hauteur, puisque leurs sommets sont sur une parallèle à leur base commune : ils sont donc équivalents.

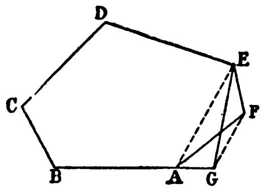


Fig. 208.

Remarque. — On peut évaluer l'aire d'un polygone en le transformant en un polygone équivalent.

Si, par exemple, il s'agit d'un trapèze ABCD (*fig.* 209), on construira le triangle ADE qui lui est équivalent en menant CE parallèle à BD, et, comme on a $BE = CD$, on en déduira la formule déjà obtenue pour calculer l'aire d'un trapèze (246).

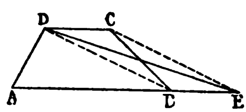


Fig. 209.

Problème II

261. — Construire un carré équivalent à un polygone donné.

On construira d'abord un triangle équivalent au polygone donné; soient b et h la base et la hauteur de ce triangle, et x le côté du carré cherché : on doit avoir :

$$x^2 = \frac{1}{2} bh.$$

et par suite x sera la moyenne proportionnelle entre la demi-base $\frac{1}{2}b$, et la hauteur h, par exemple.

Si le polygone cherché est un rectangle, ou un parallélogramme, ou un trapèze, sa surface est le produit de deux lignes : la moyenne proportionnelle entre ces deux lignes sera le côté du carré cherché.

Problème III

262. — Construire un polygone équivalent à un polygone donné P et semblable à un autre polygone donné Q.

Soit p le côté du carré équivalent à P; soit de même q le côté du carré équivalent à Q; soit enfin a un côté quelconque de Q et x le côté homologue du polygone cherché. On aura (256) :

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{x^2}{a^2},$$

puisque $\frac{p^2}{q^2}$ est le rapport des aires du polygone cherché et du polygone Q. On en tire :

$$x=\frac{ap}{q},$$

et l'on est ramené à la construction d'une quatrième proportionnelle. Connaissant x, on sera ramené au problème du n° **198**.

Problème IV

263. — Soient P et P′ deux polygones semblables; construire un polygone semblable aux précédents et équivalent à leur somme ou à leur différence.

Soient a, a', x trois côtés homologues dans les poly-

gones P, P′ et dans le polygone cherché; soient P, P′, X les aires de ces trois polygones. On a (256) :

$$\frac{P}{X}=\frac{a^2}{x^2},\quad \frac{P'}{X}=\frac{a'^2}{x^2}.$$

Ajoutant membre à membre et remarquant que

$$P \pm P' = X,$$

il vient

$$x^2 = a^2 \pm a'^2,$$

suivant que le polygone cherché est équivalent à la somme ou à la différence des deux polygones donnés.

S'il s'agit de la somme, x sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et a'; s'il s'agit de la différence, x sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et a' pour premier côté de l'angle droit.

Connaissant x, on sera ramené au problème du n° 198.

Remarque. — La question analogue relative aux cercles se résoudra d'une façon identique.

Problème V

264. — Construire un polygone semblable à un polygone donné P, et dont l'aire soit à l'aire P dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

Soient a et x deux côtés homologues de P et du polygone cherché. On doit avoir :

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{m}{n},$$

d'où

$$x^2 = a^2\frac{m}{n} = a.\frac{am}{n};$$

or il est facile de construire la longueur $\frac{am}{n}$, que le rap-

port $\frac{m}{n}$ soit celui de deux lignes ou celui de deux nombres. Une fois cette longueur construite, il suffira de chercher la moyenne proportionnelle entre elle et a pour obtenir x.

Connaissant x, on sera ramené au problème du n° **198**.

Remarque. — La question analogue relative aux cercles se résoudra d'une façon identique.

Exercices

1. — Partager un triangle donné par une parallèle à l'un des côtés en deux parties dont les aires soient dans un rapport donné.

2. — Partager un triangle donné par une droite issue d'un sommet en deux parties dont les aires soient dans un rapport donné.

3. — Partager un trapèze par une parallèle aux bases en deux parties dont les aires soient dans un rapport donné.

4. — Inscrire dans un triangle donné un rectangle ayant une aire donnée.

5. — Partager un cercle en parties proportionnelles à des nombres donnés par des circonférences concentriques.

6. — Inscrire dans un cercle donné un rectangle de surface donnée.

7. — Construire un triangle, connaissant ses angles et sa surface.

Questions diverses de géométrie plane

1. — A un cercle de rayon donné R est circonscrit un quadrilatère ABCD dont une diagonale AC passe par le centre O. La distance AO est double du rayon, et les deux angles opposés A et C de ce quadrilatère sont supplémentaires :

1° Evaluer les angles B et D, l'aire du triangle AIO (I étant le point de contact de AB) et l'aire du quadrilatère ABCD;

2° Evaluer le rayon du cercle qui passerait par les quatre sommets du quadrilatère.

Comme application, on supposera $R = 1^m,2$.

2. — On donne deux cercles O et O'; le rayon du premier a $0^m,06$, celui du second $0^m,03$, et le centre du second est placé sur la circonférence du premier. On trace la tangente commune AA' qui coupe la ligne des centres en T :

1° Calculer la distance OT;

2° Calculer la longueur AA′ de la tangente commune;

3° Que devrait être le rayon de la petite circonférence pour que, celui de la grande ne changeant pas, la tangente commune ait une longueur de $0^m,04$?

3. — Soit ABC un triangle dans lequel l'angle A est droit et l'angle B double de l'angle C. On donne l'hypoténuse $BC = a$:

1° On demande de calculer les deux côtés de l'angle droit;

2° On construit sur l'hypoténuse le carré BCDE, puis sur AB et AC les triangles équilatéraux ABF et ACG; calculer la distance du point F à la droite BE et la distance du point G à la droite AF;

3° Calculer la surface totale EFGB obtenue en joignant F à G et à E.

4. — Une ligne droite xy et deux points A et B étant donnés dans le même plan, trouver sur la ligne xy le point d'où l'on voit la droite AB sous le plus grand angle possible.

5. — Dans une circonférence de rayon donné R, on trace une corde fixe AB, puis une corde AM mobile autour du point A. On construit ensuite le parallélogramme ABDM dont deux côtés adjacents sont AB et AM et on mène la diagonale AD. On demande :

1° Trouver le lieu géométrique des milieux des diagonales telles que AD lorsque le point M se déplace sur la circonférence;

2° Parmi tous les parallélogrammes ainsi construits, quel est celui dont la diagonale menée de A est la plus grande ou la plus petite?

3° Calculer la longueur de chacune de ces deux diagonales, dans le cas où la corde AB est le côté du triangle équilatéral inscrit.

6. — Etant donnés les côtés a, b, c d'un triangle ABC, calculer les rayons de trois circonférences ayant pour centres les trois sommets, sachant que les circonférences ayant pour centres B et C sont tangentes extérieurement, et que chacune d'elles est tangente intérieurement à la circonférence ayant A pour centre. — Construction géométrique.

Calculer la surface du triangle curviligne formé par les arcs que limitent les points de contact dans le cas où le triangle ABC, étant rectangle en A, a un angle B de 60° et une hypoténuse de 10^m.

7. — Une étoffe se rétrécit par le lavage de $\frac{1}{20}$ dans le sens de sa longueur et de $\frac{1}{19}$ dans le sens de la largeur. Sachant que cette étoffe a $0^m,95$ de largeur, quelle longueur en faudra-t-il prendre pour qu'après le lavage on en ait $21^{mq},7170$?

8. — Etant donnée une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre, on demande de déterminer sur la demi-circon-

férence un point M tel que si on prolonge AM d'une longueur MQ égale au rayon, si on joint QB et si par M on mène dans le triangle AQB la parallèle MN à la base AB, la somme AM + MN soit égale à une ligne donnée K.

9. — Etant donné un triangle ABC dont les côtés ont les valeurs suivantes $AB = 5^m$, $BC = 6^m$, $AC = 2^m$, on mène la bissectrice AI de l'angle A.

Calculer 1° la surface des deux triangles ABI, ACI; 2° la longueur de la parallèle ID à AC, terminée au côté AB en D.

10. — La hauteur d'une chambre, la longueur et la largeur sont entre elles comme les nombres 2, 6, 5. Trouver les dimensions de la chambre, sachant que, pour tapisser les murs, il a fallu 176^{mq} de papier. Calculer la surface de chaque mur.

11. — On donne les quatre côtés d'un trapèze isocèle : les deux côtés parallèles ont l'un 7^m, et l'autre $9^m,60$; les deux côtés non parallèles ont chacun 6^m. Trouver l'aire du triangle que l'on formerait en prolongeant ces deux derniers côtés.

12. — Un losange a pour diagonales $AB = 1^m,3455$ et $CD = 2^m,484$. Par deux points distants de $0^m,45$ des extrémités C et D et pris sur CD, on fait passer les lignes EF, E'F' parallèles à AB. Quelle est la surface de la figure EFBF'E'A?

13. — Dans le trapèze ABCD, les angles B et D sont droits, l'angle en A est de 60°, la base $AB = 10^m$, et la hauteur $BD = 4^m,80$. Calculer 1° la surface du trapèze; 2° à quelle distance de la ligne AB passera la parallèle EF qui partage le trapèze ABCD en deux parties équivalentes; 3° la longueur de cette parallèle.

14. — Etant donnés deux points A et B et une droite LL' parallèle à AB, on demande de trouver sur la droite LL' un point M tel que le produit des distances du point M aux points A et B soit égal à un carré donné K^2; discuter; chercher dans quel cas l'angle en M du triangle AMB est aigu ou obtus. On désignera par $2a$ la longueur AB, par h la distance des deux droites parallèles AB, LL' et par x la distance du milieu O de AB au pied H de la hauteur MH.

15. — Etant donné un triangle équilatéral ABC de côté a, on décrit un arc de cercle tangent en A et B aux côtés AC, BC; puis on décrit un second arc tangent en A et B aux bissectrices des angles A et B :

1° Evaluer en degrés les deux arcs ADB, AEB ainsi obtenus;

2° Calculer les rayons des deux cercles auxquels ces arcs appartiennent;

3° Evaluer l'aire comprise entre ces deux arcs.

Comme application, on fera $a = 4^m,5$.

16. — Inscrire un carré dans un carré donné. — Quel est le plus petit carré inscriptible dans un carré donné?

17. — Etant donné un trapèze dont les bases sont de

5^m et de 8^m, et la hauteur de 7^m, à quelle distance de la petite base faut-il mener une parallèle aux bases pour avoir entre la petite base et cette parallèle un trapèze partiel dont l'aire soit équivalente à celle d'un secteur construit dans un cercle de 6^m de rayon, avec un arc de 100 degrés?

18. — On donne deux circonférences O et O′ tangentes extérieurement en A et l'une des tangentes communes extérieures BB′. Soit M le point milieu de la partie de cette tangente qui est comprise entre les deux points de contact B et B′. 1° Démontrer que la perpendiculaire à la ligne des centres OO′ menée par le point A passe par le point M; 2° démontrer que le triangle OMO′ est rectangle en M; 3° connaissant les longueurs R et R′ des rayons des deux circonférences, exprimer la surface du triangle OMO′.

19. — On donne une droite indéfinie xx' et un point O sur cette droite; par le point O on mène les demi-droites OA, OB perpendiculaires entre elles, et du même côté de xx'; puis sur ces deux demi-droites, on porte respectivement à partir du point O des longueurs données $OB = a$, $OA = b$; enfin, on joint AB, et du milieu I de AB on abaisse la perpendiculaire IH sur xx'; on demande de déterminer l'angle BOx de façon que IH soit égale à une longueur donnée $\frac{c}{2}$.

20. — Dans un cercle de rayon R est inscrit un trapèze isocèle ABCD; la diagonale AC fait un angle de 45° avec la base AB, un angle de 30° avec le côté AD. On propose d'évaluer les arcs sous-tendus par les côtés du trapèze et l'angle des diagonales; de calculer les segments des deux diagonales et l'aire du trapèze ainsi que le rayon du cercle passant par les milieux des quatre côtés. On prendra $R = 1^m$.

21. — La surface d'un hexagone régulier est 1^{mq}; quelles seront les surfaces des cercles inscrit et circonscrit?

22. — On inscrit dans un cercle trois cercles égaux tangents extérieurement deux à deux; calculer les rayons de ces cercles, et les aires des différentes parties dans lesquelles ils décomposent le cercle donné.

23. — Dans un triangle, la droite qui joint un sommet au milieu d'une médiane ne passant pas par ce sommet, divise le côté opposé dans le rapport de 1 à 2; et réciproquement.

24. — Un triangle équilatéral étant inscrit dans un cercle, on joint les milieux de deux arcs sous-tendus par deux des côtés du triangle; comment cette droite est-elle partagée par ces deux côtés?

25. — Inscrire un carré dans un parallélogramme.

26. — Un triangle est rectangle ou isocèle lorsque les carrés de deux côtés sont entre eux comme les projections de ces côtés sur le troisième.

27. — Soient deux cercles O et O′ tangents extérieurement en A et BB′ une tangente commune extérieure; soit de plus C un cercle tangent aux deux cercles donnés et à BB′; démontrer que si R, R′, r sont les rayons des cercles O, O′ et C, on a:

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{R'}}.$$

Application. — Calculer r en faisant $R=5^m$, $R'=3^m$.

28. — Si par un point pris dans le plan d'un cercle on mène deux sécantes rectangulaires, la somme des carrés des cordes interceptées est constante.

29. — Calculer la surface d'un triangle, connaissant les trois médianes.

30. — Soit ABC un triangle coupé par une parallèle B′C′ à BC; les triangles ABC′, AB′C sont équivalents et l'aire de chacun d'eux est moyenne proportionnelle entre les aires des triangles ABC, AB′C′.

31. — Une diagonale d'un pentagone régulier décompose cette figure en deux parties dont on demande d'évaluer la surface.

32. — Même question pour l'hexagone régulier.

33. — Les côtés du pentagone régulier étoilé forment en s'entrecoupant un pentagone régulier convexe dont on demande l'aire en fonction du rayon du cercle circonscrit au premier pentagone.

34. — Même question pour les autres polygones réguliers étoilés.

35. — Quelle est la surface de l'étoile formée par les côtés du pentagone régulier étoilé?

36. — Même question pour les autres polygones réguliers étudiés.

37. — On donne un carré ABCD; on mène les diagonales, et de chaque sommet comme centre on décrit un arc de cercle passant par le point de rencontre O des diagonales et limité aux côtés de ce carré: on détermine ainsi sur les côtés du carré huit points E, F, G, H, I, K, L, M. 1° Démontrer que le polygone EFGHIKLM est un octogone régulier; 2° trouver en fonction du côté a du carré l'aire de la partie ombrée de la figure 210. Application : $a=5^m$.

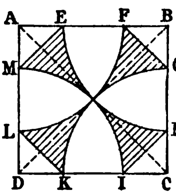


Fig. 210.

APPENDICE A LA GÉOMÉTRIE PLANE

NOTIONS DE TRIGONOMÉTRIE

265. — Considérons un angle quelconque AOB aigu ou obtus (*fig.* 211 et 212), et d'un point M quelconque du côté OB menons une perpendiculaire MP sur l'autre côté OA : le pied P de cette perpendiculaire tombera sur la demi-droite OA elle-même ou sur son prolongement suivant que l'angle donné est aigu ou obtus.

Quel que soit le point M choisi, le triangle rectangle OMP a ses angles constants, puisque l'angle en O est l'angle donné ou son supplément, suivant que l'angle donné est aigu ou obtus. Il en résulte que les rapports des côtés du triangle OMP pris deux à deux sont constants, quel que soit le point M choisi : en effet, si le point M est remplacé par M′, de sorte que MP devient M′P′, les deux triangles OMP, OM′P′ sont semblables et donnent :

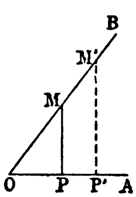


Fig. 211.

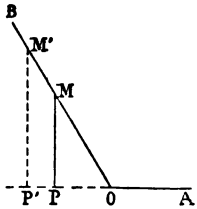


Fig. 212.

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{MP}{M'P'},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{MP}{OM} = \frac{M'P'}{OM'}, \quad \frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'}, \quad \frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'}, \text{ etc.}$$

et ces égalités démontrent la propriété annoncée.

Les rapports dont nous venons de parler et qui sont au nombre de six, savoir :

$$\frac{MP}{OM}, \frac{OP}{OM}, \frac{MP}{OP}, \frac{OM}{MP}, \frac{OM}{OP}, \frac{OP}{MP}$$

dépendent donc uniquement de la grandeur de l'angle donné AOB : ce sont des *fonctions* de cet angle.

Le premier rapport $\frac{MP}{OM}$ est appelé le *sinus* de l'angle donné; si l'on désigne par a cet angle, on écrit :

$$\frac{MP}{OM} = \sin a.$$

Le deuxième rapport $\frac{OP}{OM}$, affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que l'angle donné a est aigu ou obtus, c'est-à-dire aussi suivant que le segment OP, d'origine O, est compté dans le sens OA ou dans le sens opposé, est appelé le *cosinus* de l'angle a, et l'on écrit, suivant les cas :

$$\pm \frac{OP}{OM} = \cos a.$$

Le troisième rapport $\frac{MP}{OP}$, affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant le sens dans lequel est compté OP, comme plus haut, est appelé la *tangente* de l'angle a, et l'on écrit, suivant les cas :

$$\pm \frac{MP}{OP} = \text{tang}\, a \,(\text{ou} = \text{tg}\, a).$$

Remarquons que l'on a :

$$\text{tg}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

dans tous les cas.

Le quatrième rapport $\frac{OM}{MP}$ est l'inverse du rapport $\frac{MP}{OM}$,

c'est-à-dire de sin a; on l'appelle la *cosécante* de l'angle a, et l'on écrit :

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MP}} = \text{coséc}\, a = \frac{1}{\sin a}.$$

Le cinquième rapport $\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}}$, affecté du signe + ou du signe —, suivant le sens dans lequel est compté OP, comme plus haut, est l'inverse de cos a; on l'appelle la *sécante* de l'angle a, et l'on écrit suivant les cas :

$$\pm \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}} = \text{séc}\, a = \frac{1}{\cos a}.$$

Enfin le sixième rapport $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{MP}}$, affecté du signe + ou du signe —, suivant le sens dans lequel est compté OP, comme plus haut, est l'inverse de tg a; on l'appelle la *cotangente* de l'angle a, et l'on écrit suivant les cas :

$$\pm \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{MP}} = \text{cotg}\, a = \frac{1}{\text{tg}\, a} = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

Les six fonctions sin a, cos a, tg a, coséc a, séc a, cotg a, sont *les six lignes trigonométriques* de l'angle a.

266. — Les lignes fondamentales sont le sinus et le cosinus. La tangente est le quotient du sinus par le cosinus; on voit que son introduction n'est pas nécessaire : elle sert à simplifier les formules et les calculs, en remplaçant le quotient de deux nombres par un seul. Les trois autres lignes sont les inverses des trois premières; on peut donc se dispenser de les étudier, leur introduction ne servant qu'à remplacer une division par une multiplication.

En résumé, nous ne nous occuperons que des trois premières lignes, laissant au lecteur le soin de développer pour les trois autres des considérations analogues à celles qui vont nous occuper maintenant.

Remarquons que le sinus d'un angle est toujours positif; le cosinus et la tangente sont des nombres algé-

briques positifs ou négatifs suivant que l'angle est aigu ou obtus.

267. — On a toujours :

$$(1)\quad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a};$$

mais le sinus et le cosinus d'un angle sont liés eux-mêmes par une relation facile à obtenir. Le triangle rectangle OMP donne en effet :

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2,$$

ou

$$\left(\frac{MP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{OP}{OM}\right)^2 = 1,$$

c'est-à-dire, dans tous les cas :

$$(2)\quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Cette relation est fondamentale.

268. — Les formules (1) et (2) montrent que l'on connaît les lignes trigonométriques d'un angle dès que l'on connaît l'une d'entre elles. D'une façon plus précise, 1° connaissant $\sin a$, on a :

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a,$$

d'où

$$\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a},$$

suivant que l'angle a est aigu ou obtus ; et par suite, de même :

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 a}}.$$

Si la valeur de $\sin a$ donnée est une fraction de la forme $\frac{p}{q}$, on aura :

$$\cos a = \pm\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{p}{\pm\sqrt{q^2 - q^2}}.$$

Exemple. — Le sinus de l'angle de 30° est $\frac{1}{2}$; on en déduit :

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2° Connaissant $\cos a$, on a :

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a,$$

d'où : $$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

puisqu'un sinus est toujours positif, et

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}.$$

Si la valeur de $\cos a$ donnée est une fraction de la forme $\frac{\pm p}{q}$, p et q étant des nombres positifs, on aura :

$$\sin a = \frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{\pm\sqrt{q^2 - p^2}}{p}.$$

Exemple. — Le cosinus de l'angle de 60° est $\frac{1}{2}$; on en déduit :

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

3° Connaissant $\operatorname{tg} a$, on a d'abord :

$$\cos a = \frac{\sin a}{\operatorname{tg} a}$$

et par suite :

$$\sin^2 a + \frac{\sin^2 a}{\operatorname{tg}^2 a} = 1,$$

d'où : $$\sin^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

et $$\sin a = \frac{\pm \operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

suivant que l'angle a est aigu ou obtus, puisqu'un sinus est toujours positif; on en tire ensuite :

$$\cos a = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}.$$

Si la valeur de $\text{tg}\, a$ donnée est une fraction de la forme $\frac{\pm p}{q}$, p et q étant des nombres positifs, on aura :

$$\sin a = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \cos a = \frac{\pm q}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Exemple. — La tangente de l'angle de 45° est 1 ; on en déduit :

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La tangente de l'angle de 135° est -1 ; on en déduit :

$$\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

269. — Considérons deux angles supplémentaires AOB, A'OB (*fig.* 213); si l'un d'eux est a, l'autre sera $180° - a$. Leurs sinus sont égaux : car chacun d'eux a pour sinus $\frac{\text{MP}}{\text{OM}}$; on a donc :

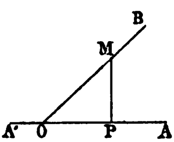


Fig. 213.

$$\sin(180° - a) = \sin a.$$

Leurs cosinus sont égaux et de signes contraires ; car l'angle aigu AOB a pour cosinus le rapport $\frac{\text{OP}}{\text{OM}}$, et l'angle obtus A'OB a pour cosinus le rapport $-\frac{\text{OP}}{\text{OM}}$; on a donc :

$$\cos(180° - a) = -\cos a.$$

On en déduit immédiatement par division :

$$\text{tg}(180° - a) = -\text{tg}\, a,$$

ce que montre aussi la figure, puisque la tangente de l'angle aigu est $\frac{MP}{OP}$, et celle de l'angle obtus est $-\frac{MP}{OP}$.

En résumé : *les sinus de deux angles supplémentaires sont égaux; leurs cosinus et leurs tangentes sont égaux et de signes contraires.*

Ceci nous montre qu'il nous suffira d'étudier les lignes trigonométriques des angles aigus.

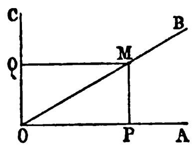


Fig. 214.

270. — Considérons deux angles complémentaires AOB, BOC (*fig.* 214). Ces deux angles sont nécessairement aigus. Du point M quelconque sur OB menons MP et MQ perpendiculaires sur OA et OC; soit a l'angle AOB, et par suite $(90° - a)$ l'angle BOC.

On a :
$$\sin(90° - a) = \frac{MQ}{OM};$$

mais $MQ = OP$, et $\cos a = \frac{OP}{OM}$; on a donc :

$$\sin(90° - a) = \cos a.$$

De même, on aura :

$$\cos(90° - a) = \frac{OQ}{OM} = \frac{MP}{OM} = \sin a$$

et

$$\operatorname{tg}(90° - a) = \frac{MQ}{OQ} = \frac{OP}{MP} = \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}.$$

Donc, en résumé :

Si deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est le cosinus de l'autre, et leurs tangentes sont inverses l'une de l'autre.

On peut encore dire que la tangente de l'un est la cotangente de l'autre; et on verrait de même que la sécante de l'un est la cosécante de l'autre.

Ces propositions nous montrent comment les mots

sinus, tangente et sécante ont conduit aux mots cosinus, cotangente et cosécante.

271. — Soit un angle aigu a, et cherchons les lignes de l'angle $90^\circ + a$.

L'angle $90^\circ + a$ est supplémentaire de l'angle $90^\circ - a$. On a donc :

$$\sin(90^\circ + a) = \sin(90^\circ - a) = \cos a$$
$$\cos(90^\circ + a) = -\cos(90^\circ - a) = -\sin a$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ + a) = -\operatorname{tg}(90^\circ - a) = -\frac{1}{\operatorname{tg} a},$$

égalités qu'il serait facile de traduire en langage ordinaire.

Une figure donnerait directement les mêmes résultats avec la plus grande facilité.

272. — Cherchons maintenant comment varient les lignes trigonométriques d'un angle qui augmente constamment de 0 à 180°.

A cet effet, considérons un cercle O, et un diamètre AA′ (*fig.* 215). Soit BB′ le diamètre perpendiculaire à AA′. Si M est un point variable qui décrit la demi-circonférence ABA′ depuis A jusqu'à A′, l'angle AOM croîtra d'une façon continue depuis 0° jusqu'à 180° : pour fixer les idées, nous appellerons M le point qui décrit le quadrant AB, et M′ le point qui décrit le quadrant BA′; MP et M′P′ seront les perpendiculaires menées de M et M′ sur le diamètre AA′; T et T′ seront les points où les rayons OM et OM′ rencontrent la tangente AC au cercle au point A.

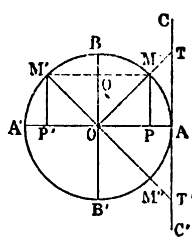


Fig. 215.

1° Le sinus de l'angle AOM est le rapport $\frac{MP}{OM}$; si M décrit le quadrant AB, OM reste fixe, et MP augmente d'une façon continue depuis O jusqu'à OB; donc :

Si un angle croît de 0° *à* 90°, *son sinus croît d'une façon continue depuis* 0 *jusqu'à* 1

Le sinus de l'angle AOM' est le rapport $\frac{M'P'}{OM'}$; si M' décrit le quadrant BA', OM' reste constant, et M'P' décroît d'une façon continue depuis OB jusqu'à zéro; donc :

Si un angle croît de 90° *à* 180°, *son sinus décroît d'une façon continue depuis* 1 *jusqu'à zéro.*

Cette seconde proposition est une conséquence directe de la première si l'on se rappelle que deux angles supplémentaires ont le même sinus.

2° Le cosinus de l'angle AOM est le rapport $\frac{OP}{OM}$; si M décrit le quadrant AB, OP diminue d'une façon continue depuis OA jusqu'à zéro; donc :

Si un angle croît de 0° *à* 90°, *son cosinus décroît d'une façon continue depuis* 1 *jusqu'à* 0.

Le cosinus de l'angle AOM' est le rapport $-\frac{OP'}{OM'}$; si M' décrit le quadrant BA', OP' augmente d'une façon continue depuis 0 jusqu'à 1 ; donc :

Si un angle croît de 90° *à* 180°, *son cosinus décroît d'une façon continue depuis* 0 *jusqu'à* — 1.

Ces propositions résultent d'ailleurs des propositions analogues pour le sinus, en vertu de ce qui a été dit aux n°s **270** et **271**.

3° La tangente de l'angle AOM est le rapport $\frac{AT}{OA}$ (d'où le nom de tangente); si M décrit le quadrant AB, OA reste constant, et AT augmente d'une façon continue depuis zéro jusqu'au delà de toute limite, puisque, si M vient en B, OM devient parallèle à AC. Donc :

Si un angle croît de 0° *à* 90°, *sa tangente croît d'une façon continue depuis* 0 *jusqu'au delà de toute limite.*

La tangente de l'angle AOM' est le rapport $-\frac{AT'}{OA}$, puisque $\frac{AT'}{OA}$ est la tangente de l'angle supplémentaire AOM''. Si M' décrit le quadrant BA', OA reste fixe et AT'

diminue constamment depuis une valeur aussi grande qu'on voudra jusqu'à zéro; donc :

Si un angle croît de 90° *à* 180°, *sa tangente croît d'une façon continue depuis une valeur négative aussi grande qu'on voudra en valeur absolue, jusqu'à* 0.

Ces propositions résultent d'ailleurs des propositions analogues pour le sinus et le cosinus, puisqu'on a $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$.

273. — Résolvons maintenant les questions suivantes :

1° *Trouver un angle ayant un sinus donné* m.

Il faut que m soit compris entre 0 et 1, et il résulte alors de ce qui précède qu'il y a deux angles supplémentaires, l'un aigu et l'autre obtus, ayant pour sinus le nombre m. On les obtiendra de la façon suivante ; sur OB, portons une longueur OQ telle que $\frac{OQ}{OA} = m$; la parallèle à AA′ coupe le cercle en M et M′ ; les deux angles AOM, AOM′ répondent à la question.

2° *Trouver un angle ayant un cosinus donné* m.

Il faut que m soit compris entre -1 et $+1$, et il résulte alors de ce qui précède qu'il y a un seul angle répondant à la question, aigu ou obtus suivant que m est positif ou négatif. On l'obtiendra de la façon suivante : sur OA ou sur OA′ on portera une longueur OP ou OP′ telle que $\frac{OP}{OA} = m$ ou $\frac{OP'}{OA} = -m$, suivant que m est positif ou négatif; la perpendiculaire PM ou P′M′ rencontre le demi-cercle en M ou M′ : l'angle AOM ou l'angle AOM′ répond à la question.

3° *Trouver un angle ayant une tangente donnée* m.

Quel que soit le nombre m, il résulte de ce qui précède qu'il y aura toujours un angle et un seul répondant à la question, aigu ou obtus, suivant que m est positif ou négatif. On obtiendra cet angle de la façon suivante : sur AC ou AC′, on portera une longueur AT ou AT′ telle que $\frac{AT}{OA} = m$, ou $\frac{AT'}{OA} = -m$, suivant que m est positif

ou négatif; le rayon OT ou OT′ coupe le demi-cercle ABA′ en M ou M′ : l'angle AOM ou l'angle AOM′ répond à la question.

274. — Ce qui précède ne nous donne actuellement comme connues que les lignes trigonométriques des angles 0°, 90° et 180° : on a

$$\begin{array}{lll} \text{Sin } 0° = 0, & \sin 90° = 1, & \sin 180° = 0. \\ \text{Cos } 0° = 1, & \cos 90° = 0, & \cos 180° = -1. \\ \text{Tg } 0° = 0, & \text{tg } 90° = \infty, & \text{tg } 180° = 0. \end{array}$$

Il est facile de voir que nous pouvons écrire aussi les valeurs des lignes trigonométriques d'un certain nombre d'autres angles. Considérons dans une circonférence O un angle au centre MOM′ et sa bissectrice OA (*fig.* 216); la corde MM′ de l'arc MAM′ qui rencontre OA en P est double de MP et est perpendiculaire sur OA; par suite le rapport $\frac{MP}{OM}$ est le sinus de l'angle AOB, et l'on peut dire que : *le sinus d'un angle au centre* AOM *est la moitié du rapport au rayon de la corde qui sous-tend l'arc correspondant à l'angle double* MOM′.

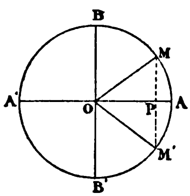


Fig. 216.

Si donc $2a$ est l'angle au centre d'un polygone régulier dont on connaît le rapport s du côté au rayon, on aura :

$$\sin a = \frac{s}{2}.$$

Ainsi pour le carré, on a :

$$2a = 90° \quad \text{et} \quad s = \sqrt{2};$$

donc

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

on en déduit :

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{tg } 45° = 1.$$

Retenons en particulier de ceci que lorsqu'un angle varie de 0° à 45° sa tangente croît de 0 à 1; lorsqu'un angle varie de 45° à 90°, sa tangente augmente depuis 1 jusqu'au delà de toute limite.

Pour l'octogone régulier, on a :

$$2a=45^\circ, \quad s=\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

donc

$$\sin 22^\circ 30'=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

d'où l'on déduit

$$\cos 22^\circ 30'=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30'=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=-1+\sqrt{2}.$$

On en déduirait encore les lignes trigonométriques du complément 67°30'.

Pour le triangle équilatéral, on a :

$$2a=120^\circ, \quad s=\sqrt{3},$$

d'où

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}.$$

On en déduit encore, les angles de 60° et de 30° étant complémentaires :

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

résultats qu'on obtiendrait aussi en partant de l'hexagone régulier.

Pour le dodécagone régulier, on a :

$$2a=30^\circ, \quad s=\sqrt{2-\sqrt{3}};$$

donc

$$\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, \quad \cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}.$$

Pour le pentagone régulier, on a :

$$2a = 72^\circ, \quad s = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

donc

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4};$$

pour le décagone régulier, on a :

$$2a = 36^\circ, \quad s = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};$$

donc

$$\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \text{ etc.}$$

Il est nécessaire de savoir par cœur les valeurs des lignes trigonométriques des angles 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

275. — On peut aller plus loin, en établissant une formule analogue à celle qui nous a servi, connaissant le côté d'un polygone régulier, à trouver le côté d'un polygone régulier de même rayon et d'un nombre de côtés double. Nous allons à cet effet résoudre le problème suivant :

Connaissant le cosinus d'un angle a, *calculer le cosinus et le sinus de l'angle moitié* $\frac{a}{2}$.

Soit AOB l'angle donné (*fig.* 217 et 218) aigu ou obtus,

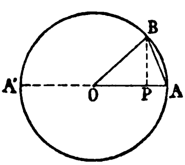


Fig. 217.

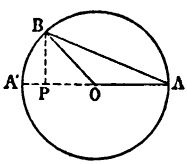


Fig. 218.

dont le sommet est au centre d'une circonférence de rayon quelconque R.

Le sinus de l'angle $\frac{a}{2}$, d'après ce qui précède, est la moitié du rapport $\frac{AB}{R}$; projetons le point B en P sur le diamètre AA'; d'après un théorème connu (181), on a :

$$\overline{AB}^2 = AA' \times AP,$$

ou

$$\overline{AB}^2 = 2R \times AP.$$

On en déduit :

$$\frac{\overline{AB}^2}{4R^2} = \frac{AP}{2R},$$

ou

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{AP}{2R}}.$$

Si l'angle a est aigu, on a :

$$AP = OA - OP,$$

d'où

$$\frac{AP}{R} = 1 - \frac{OP}{R} = 1 - \cos a,$$

et par suite

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}};$$

de même, si l'angle a est obtus, on a :

$$AP = OA + OP,$$

d'où

$$\frac{AP}{R} = 1 + \frac{OP}{R} = 1 - \cos a,$$

puisque alors

$$\cos a = -\frac{OP}{R},$$

et par suite comme plus haut :

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}.$$

Cette formule est donc générale.

On en déduit :

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{a}{2}}=\sqrt{1-\frac{1-\cos a}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}.$$

(L'angle $\frac{a}{2}$ étant nécessairement aigu, son cosinus est positif.)

Des formules qu'on vient d'obtenir, on déduit encore :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

Applications. — 1° Calculer les lignes trigonométriques de l'angle de 11°15′. On a :

$$\cos 22°30'=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

donc

$$\sin 11°15'=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\cos 11°15'=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\operatorname{tg} 11°15'=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

2° Calculer les lignes trigonométriques de l'angle de 9°. On a :

$$\cos 18°=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

et par suite

$$\sin 9°=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\cos 9^\circ = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{tg} 9^\circ = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}} = \frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}.$$

Remarque. — Les transformations de radicaux que présentent les formules précédentes devront être vérifiées directement comme exercice.

276. — Plus généralement, on peut calculer le sinus d'un angle quelconque, et par suite toutes les lignes trigonométriques de cet angle.

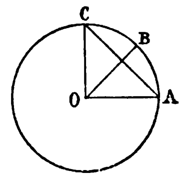


Fig. 219.

Nous pouvons supposer l'angle donné AOB aigu (*fig.* 219); imaginons que son sommet soit le centre d'une circonférence de rayon quelconque R. Considérons l'angle double AOC; la longueur de l'arc ABC est facile à calculer, c'est :

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

si n est la mesure de l'angle donné en degrés.

Or, connaissant la longueur l de l'arc AC, ou plutôt le rapport $\frac{l}{R}$, nous savons calculer (**232**) le rapport $\frac{a}{R}$ de la corde AC au rayon : la moitié de ce rapport sera le sinus de l'angle donné.

Exemple. — Nous avons trouvé au n° **232** que le rapport au rayon de la corde de l'arc de 10° était 0,174311 : nous en concluons que le sinus de l'angle de 5° est :

$$\frac{1}{2} \times 0{,}174311 = 0{,}087156.$$

277. — On conçoit, d'après ce qui précède, la pos-

sibilité de construire une table contenant, avec une approximation donnée, les lignes trigonométriques de tous les angles qu'on voudra. On trouvera à la fin du volume une telle table contenant les six lignes trigonométriques de tous les angles aigus de dix minutes en dix minutes, calculées à moins d'une demi-unité près du quatrième ordre décimal. Il faut remarquer qu'il suffirait de donner les valeurs du sinus et du cosinus : nous y avons joint les valeurs de la tangente, de la cotangente, de la sécante ou de la cosécante, afin de simplifier les calculs que l'on aura à faire avec cette table : de cette façon, en effet, les opérations à effectuer ne seront plus que des multiplications et seront réduites au nombre minimum.

Pour éviter toute erreur, nous avons mis les titres $\frac{1}{\sin}$, $\frac{1}{\cos}$, $\frac{1}{\operatorname{tg}}$ aux colonnes qui devraient être intitulées coséc, séc, cotg.

Les lignes trigonométriques d'un angle supérieur à 45° étant les mêmes, dans un autre ordre, que celles de son complément qui est inférieur à 45°, il suffit de calculer la table jusqu'à 45° : pour éviter au calculateur toute perte de temps, les angles supérieurs à 45° sont aussi inscrits dans la table, mais *à droite* de chaque page *en montant*, et les indications correspondantes doivent être prises *en bas* de la page ; tandis que, pour les angles inférieurs à 45°, il faut lire *à gauche* de la page *en descendant*, et se reporter aux indications inscrites *en haut* de la page. Les deux angles qui sont sur une même ligne, l'un à gauche, l'autre à droite, sont toujours complémentaires.

278. — Cette table servira à résoudre les deux problèmes suivants :

Premier problème. — *Connaissant un angle, trouver l'une quelconque de ses lignes trigonométriques.*

Nous supposerons les angles donnés en degrés et minutes : une approximation plus grande est inutile pratiquement.

Si l'angle donné est obtus, on considérera son supplé-

ment, en se rappelant les règles du n° 269 : nous sommes donc ramenés aux seuls angles aigus.

Si l'angle donné aigu est inscrit dans la table, il n'y a rien de particulier à dire.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit, par exemple, à chercher le sinus de l'angle de 39°3'. Cet angle est compris entre les angles de 39° et de 39°10' qui se suivent dans la table et qui ont respectivement pour sinus 0,6293 et 0,6316.

D'après ce qui a été dit sur la variation du sinus, le sinus cherché sera compris entre ces deux nombres. Or, la différence entre ces deux nombres est de 23 unités du quatrième ordre décimal; si nous envisageons les différences voisines analogues :

$$\sin 39° - \sin 38°50' = 0{,}6293 - 0{,}6271 = 0{,}0022$$
$$\sin 39°20' - \sin 39°10' = 0{,}6338 - 0{,}6316 = 0{,}0022,$$

nous constatons qu'elles sont sensiblement égales à la première différence considérée.

Nous en concluons que, dans les environs de l'angle donné, à des accroissements égaux de l'angle correspondent des accroissements égaux du sinus; et par suite, puisque, l'angle de 39° augmentant de 10', son sinus augmente de 23 unités du quatrième ordre décimal, si cet angle augmente seulement de 3' (de façon à obtenir l'angle cherché), son sinus augmentera de $\frac{3 \times 23}{10}$ unités du quatrième ordre décimal.

$\frac{3 \times 23}{10} = 6{,}9$; comme nous ne gardons pas de décimales au delà de la quatrième, nous prenons 0,0007 pour accroissement du sinus, à moins d'une demi-unité près du quatrième ordre décimal (en forçant le chiffre 6 qui est suivi d'un 9), et nous écrivons :

$$\begin{aligned}\sin 39°3' &= \sin 39° + 0{,}0007\\ &= 0{,}6293 + 0{,}0007\\ &= 0{,}6300.\end{aligned}$$

L'opération que nous venons de faire s'appelle *interpolation;* une fois qu'on en a bien compris le principe, il est inutile de répéter chaque fois le raisonnement qui précède. On dira simplement :

$$\sin 39^\circ = 0{,}6293; \quad \sin 39^\circ 10' - \sin 39^\circ = 0{,}0023;$$

$$\frac{23 \times 3}{10} = 6{,}9;$$

donc :

$$\sin 39^\circ 10' = 0{,}6293 + 0{,}0007 = 0{,}6300.$$

Avec un peu d'habitude, tous ces calculs se font de tête, en regardant simplement la table. Si toutefois on veut conserver la trace du raisonnement, on disposera l'opération de la façon suivante, qui se comprend d'elle-même après ce qui précède :

$$\begin{array}{ll} \sin 39^\circ & = 0{,}6293 \\ & \quad\;\; +7 \\ \hline \sin 39^\circ 3' & = 0{,}6300 \end{array} \qquad 23 \times \frac{3}{10} = 6{,}9.$$

On obtiendra de la même façon les autres lignes trigonométriques du même angle. Il faudra simplement bien faire attention que le sinus, la tangente, et la fonction $\frac{1}{\text{cosinus}}$ augmentent en même temps que l'angle aigu, tandis qu'au contraire le cosinus et les fonctions $\frac{1}{\text{sinus}}$ et $\frac{1}{\text{tang}}$ diminuent lorsque l'angle aigu augmente.

C'est ainsi que l'on aura :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sin 39^\circ} & = 1{,}5890 \\ & \quad\; -17 \\ \hline \dfrac{1}{\sin 39^\circ 3'} & = 1{,}5873 \end{array} \qquad 57 \times \frac{3}{10} = 17{,}1$$

$$\begin{array}{ll} \text{tg } 39^\circ & = 0{,}8098 \\ & \quad\; +14 \\ \hline \text{tg } 39^\circ 3' & = 0{,}8112 \end{array} \qquad 48 \times \frac{3}{10} = 14{,}4$$

$$\frac{1}{\text{tg } 39^\circ} = 1,2349$$
$$\underline{\quad -22}$$
$$\frac{1}{\text{tg } 39^\circ 3'} = 1,2327$$

$$73 \times \frac{3}{10} = 21,9$$

$$\frac{1}{\cos 39^\circ} = 1,2868$$
$$\underline{\quad +9}$$
$$\frac{1}{\cos 39^\circ 3'} = 1,2877$$

$$30 \times \frac{3}{10} = 9$$

$$\cos 39^\circ = 0,7771$$
$$\underline{\quad -5}$$
$$\cos 39^\circ 3' = 0,7766$$

$$18 \times \frac{3}{10} = 5,4.$$

On aurait de même, en cherchant, par exemple, le sinus et le cosinus de l'angle de 78°37′ :

$$\sin 78^\circ 30' = 0,9799$$
$$\underline{\quad +4}$$
$$\sin 78^\circ 37' = 0,9803$$

$$6 \times \frac{7}{10} = 4,2$$

$$\cos 78^\circ 30' = 0,1994$$
$$\underline{\quad -20}$$
$$\cos 78^\circ 37' = 0,1974$$

$$29 \times \frac{7}{10} = 20,3.$$

Remarque. — Ce que nous venons de dire ne peut s'appliquer que si l'on peut regarder, aux environs de l'angle donné, les accroissements de la ligne trigonométrique à calculer comme proportionnels aux accroissements de l'angle. Il faut pour cela que les différences successives des valeurs inscrites dans la table pour la ligne considérée, aux environs de l'angle donné, soient à peu près constantes.

Il suffit alors de regarder la table pour voir que la méthode ne sera pas applicable au calcul des lignes $\frac{1}{\text{sinus}}$ et $\frac{1}{\text{tang}}$ des angles depuis 0° jusqu'à 15°, et des lignes $\frac{1}{\text{cosinus}}$ et tang des angles depuis 75° jusqu'à 90°. Dans ces divers cas, il faudra calculer les lignes inverses des lignes qu'on

se proposait de calculer. Si, par exemple, on veut avoir $\frac{1}{\sin 3°43'}$, on calculera $\sin 3°43' = 0,0649$ et l'on écrira

$$\frac{1}{\sin 3°43'} = \frac{1}{0,0649}.$$

279. Deuxième problème. — *Connaissant l'une des lignes trigonométriques d'un angle, trouver cet angle.*

Si la ligne donnée est un sinus ou l'inverse d'un sinus, à cette ligne répondent deux angles, l'un aigu et l'autre obtus : d'ailleurs, ces deux angles sont supplémentaires, et il suffira par conséquent de chercher l'angle aigu.

Si la ligne donnée est une quelconque des quatre autres lignes, à cette ligne répond un seul angle, aigu ou obtus, suivant qu'elle est positive ou négative : si d'ailleurs elle est négative, l'angle obtus qui lui correspond est le supplément de l'angle aigu qui correspond à la même ligne prise avec le signe $+$. Il suffit donc, dans tous les cas, de chercher l'angle aigu qui correspond à une ligne positive donnée.

Pour effectuer cette recherche, on fera le calcul inverse du précédent. Soit, par exemple, à chercher l'angle x tel que $\sin x = 0,6300$.

Dans la colonne des sinus, 0,6300 est compris entre les sinus des angles 39° et 39°10′ qui sont respectivement 0,6293 et 0,6316; leur différence est 0,0023, tandis que la différence entre le sinus donné et le sinus de 39° est 0,0007. Puisqu'à une variation de 23 unités du quatrième ordre décimal dans le sinus répond une variation de 10′ pour l'angle, à une variation de 7 unités du même ordre répondra une variation de $\frac{7 \times 10}{23}$ minutes, soit 3 minutes : l'angle cherché est donc 39°3′. On disposera les calculs ainsi, si on ne les fait pas complètement de tête :

$$\begin{array}{rl} \sin x &= 0,6300 \\ \sin 39° &= \underline{0,6293} \\ & \qquad\quad 7 \end{array} \qquad \frac{70}{23} = 3$$

$$x = 39°3'.$$

On fera de même pour les autres lignes, en se souvenant que le cosinus et les fonctions $\frac{1}{\sin}$ et $\frac{1}{\text{tang}}$ diminuent lorsque l'angle augmente, et l'on aura, par exemple, les calculs suivants :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} &= 1,5873 \\ \frac{1}{\sin 39^\circ} &= \underline{1,5890} \\ &\quad -17 \\ x &= 39^\circ 3' \end{aligned} \qquad \frac{170}{57} = 3$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= 0,8112 \\ \operatorname{tg} 39^\circ &= \underline{0,8098} \\ &\quad 14 \\ x &= 39^\circ 3' \end{aligned} \qquad \frac{140}{48} = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg} x} &= 1,2327 \\ \frac{1}{\operatorname{tg} 39^\circ} &= \underline{1,2349} \\ &\quad -22 \\ x &= 39^\circ 3' \end{aligned} \qquad \frac{220}{73} = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= 1,2877 \\ \frac{1}{\cos 39^\circ} &= \underline{1,2868} \\ &\quad 9 \\ x &= 39^\circ 3' \end{aligned} \qquad \frac{90}{30} = 3$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 0,7766 \\ \cos 39^\circ &= \underline{0,7771} \\ &\quad -5 \\ x &= 39^\circ 3'. \end{aligned} \qquad \frac{50}{18} = 3$$

Remarque. — Comme plus haut, on verra que, si l'on se donne une ligne $\frac{1}{\sin}$ ou $\frac{1}{\operatorname{tg}}$ d'un angle inférieur à 2° ou une ligne $\frac{1}{\cos}$ ou tg d'un angle supérieur à 88°, il faudra,

pour calculer cet angle, recourir à la ligne inverse de la ligne donnée.

C'est ainsi que, si l'on a $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = 36{,}5627$, on calculera d'abord $\operatorname{tg} x = 0{,}0274$, et l'on aura ensuite :

$$\begin{array}{rl} \operatorname{tg} x = 0{,}0274 & \\ \operatorname{tg} 1°30' = \underline{0{,}0262} & \qquad \frac{120}{29} = 4, \\ 12 & \end{array}$$

$$x = 1°34'.$$

La méthode d'interpolation directe est applicable ici dans des limites moins resserrées que dans le cas du premier problème, parce que, comme nous cherchons l'angle simplement à une minute près, les dernières décimales d'une ligne $\frac{1}{\sin}$ ou $\frac{1}{\operatorname{tg}}$ pour un angle inférieur à 15° ou d'une ligne $\frac{1}{\cos}$ ou tg pour un angle supérieur à 75° n'ont pas d'influence sur le résultat.

Autre remarque. —Lorsque la variation d'une ligne est très lente, il est clair qu'un angle est mal déterminé par cette ligne. C'est ainsi qu'un angle inférieur à 15° sera mal déterminé par son cosinus ou la ligne $\frac{1}{\cos}$ et qu'un angle supérieur à 75° sera mal déterminé par son sinus ou la ligne $\frac{1}{\sin}$.

Supposons en effet par exemple qu'on donne :

$$\cos x = 0{,}9968;$$

la table nous permet d'affirmer que l'angle x est compris entre 4°30′ et 4°40′, les cosinus de ces deux angles étant respectivement 0,9969 et 0,9967, mais ne nous permet point, en aucune façon, de déterminer l'angle avec plus de précision : on écrit alors $x = 4°35'$, mais cette valeur n'est exacte qu'à 5′ près. Encore, cette approximation est-elle illusoire si le nombre 0,9968 est le résultat d'un cal-

cul approché qui ne permet pas de répondre de la dernière décimale.

Concluons de là que, toutes les fois qu'on le pourra, il faudra éviter de déterminer un angle inférieur à 15° par les lignes cos ou $\frac{1}{\cos}$, et un angle supérieur à 75° par les lignes sin ou $\frac{1}{\sin}$.

280. — L'une des principales applications de la trigonométrie est la *résolution des triangles*. Voici en quoi consiste ce problème :

Soit ABC un triangle dont on désigne les angles par A, B, C et les côtés opposés à ces angles respectivement par a, b, c; les angles et les côtés s'appellent *éléments* du triangle. Résoudre un triangle c'est, connaissant trois éléments convenablement choisis de ce triangle, calculer les trois autres et la surface S du triangle.

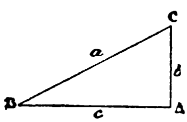


Fig. 220.

Nous nous occuperons d'abord des triangles rectangles : l'angle droit sera désigné par A et l'hypoténuse par a (*fig*. 220).

Il suffit de se rappeler la définition des lignes trigonométriques pour voir que dans un tel triangle on a :

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BC} \sin \mathrm{B} = \mathrm{BC} \cos \mathrm{C} = \mathrm{AB} \operatorname{tg} \mathrm{B}$$
$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} \sin \mathrm{C} = \mathrm{BC} \cos \mathrm{B} = \mathrm{AC} \operatorname{tg} \mathrm{C},$$

formules que nous écrirons ainsi :

$$b = a \sin \mathrm{B} = a \cos \mathrm{C} = c \operatorname{tg} \mathrm{B}$$
$$c = a \sin \mathrm{C} = a \cos \mathrm{B} = c \operatorname{tg} \mathrm{C},$$

et en langage ordinaire nous dirons :

L'un des côtés de l'angle droit est égal au sinus de l'angle opposé multiplié par l'hypoténuse, ou au cosinus de l'angle aigu adjacent multiplié par l'hypoténuse, ou à la tangente de l'angle opposé multipliée par l'autre côté de l'angle droit.

Les deux premières propositions ne sont d'ailleurs pas

distinctes, puisque, les angles B et C étant complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Aux formules ainsi obtenues, nous joindrons les suivantes, bien connues :

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad S = \frac{1}{2} bc.$$

281. — Nous pouvons traiter maintenant les quatre problèmes suivants :

I. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et un angle aigu* B.

Les formules du n° précédent donnent :

$$C = 90° - B, \quad b = a \sin B, \quad c = a \cos B, \quad S = \frac{1}{2} bc.$$

Exemple. — $B = 22°37'$, $a = 169^m$.

On calcule d'abord :

$$\sin B = 0{,}3846, \quad \cos B = 0{,}9231\,;$$

et l'on en déduit :

$$c = 67°23', \quad b = 65^m{,}00, \quad c = 156^m{,}00, \quad S = 5070^{mq}.$$

II. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant un côté* b *de l'angle droit et un angle aigu* B *ou* C.

Le second angle aigu est d'abord fourni par la relation $B + C = 90°$.

Les formules du n° précédent donnent ensuite :

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad c = \frac{b}{\operatorname{tg} B}, \quad S = \frac{1}{2} bc.$$

Exemple. — $B = 22°37'$, $b = 65^m$.

On calcule d'abord :

$$\frac{1}{\sin B} = 2{,}6004, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} B} = 2{,}4004,$$

et l'on en déduit :

$$C = 67°23', \quad a = 169^m{,}0, \quad c = 156^m{,}0, \quad S = 5070^{mq}.$$

III. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et un côté* b *de l'angle droit.*

Les formules du n° précédent donnent :

$$\sin B = \frac{b}{a}, \qquad C = 90° - B, \qquad c = \frac{b}{\operatorname{tg} B} \text{ ou } c = a \cos B,$$

$$S = \frac{1}{2} bc.$$

On peut aussi calculer d'abord c par la formule :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

et en déduire les angles par les relations :

$$\cos B = \frac{c}{a} \text{ ou } \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad C = 90° - B.$$

Si l'angle B est mal déterminé par son sinus, cette seconde méthode sera préférable :

Exemple. — $a = 169^m$, $b = 65^m$.

On a :

$$\sin B = \frac{65}{169} = 0{,}3846, \quad \text{d'où } B = 22°37' \text{ et } C = 67°23';$$

puis :

$$\frac{1}{\operatorname{tg} B} = 2{,}4004 \text{ ou } \cos B = 0{,}9231,$$

d'où

$$c = 156^m{,}0 \text{ et } S = 5070^{mq}.$$

La seconde méthode donne d'abord :

$$c = \sqrt{234 \times 104} = 156^m, \text{ puis } \cos B = 0{,}9231,$$

ou $$\operatorname{tg} B = 0{,}4167, \quad \text{d'où } B = 22°37'.$$

IV. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant les deux côtés* b *et* c *de l'angle droit.*

Les formules du n° précédent donnent :

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad C = 90° - B, \quad a = \frac{b}{\sin B} \text{ ou } a = \frac{c}{\cos B},$$

$$S = \frac{1}{2} bc.$$

On peut aussi calculer a directement par la formule :

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Exemple. — $b = 65^{\mathrm{m}}$, $c = 156^{\mathrm{m}}$.

On a :

$$\operatorname{tg} B = \frac{65}{156} = 0{,}4167, \quad \text{d'où } B = 22^\circ 37' \text{ et } C = 67^\circ 23';$$

puis :

$$\frac{1}{\sin B} = 2{,}6004 \text{ ou } \frac{1}{\cos B} = 1{,}0834, \text{ d'où } a = 169^{\mathrm{m}},0$$

$$S = 5070^{\mathrm{mq}}.$$

Directement on aurait eu :

$$a = \sqrt{65^2 + 156^2} = 169^{\mathrm{m}}.$$

282. — Relativement aux triangles quelconques, nous établirons les deux propositions fondamentales suivantes :

1° *Les côtés d'un triangle sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

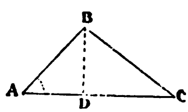


Fig. 221.

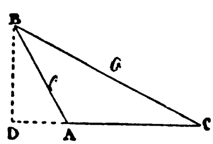


Fig. 222.

Soit BD la hauteur du triangle ABC (*fig.* 221 et 222). Le triangle rectangle ABD donne, par définition du sinus d'un angle aigu ou obtus :

$$\frac{BD}{AB} = \sin A;$$

de même le triangle rectangle CBD donne

$$\frac{BD}{BC} = \sin C.$$

Divisant membre à membre ces deux égalités, il vient en remplaçant AB par c et BC par a:

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}.$$

Un raisonnement analogue donnerait :

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B},$$

de sorte que l'on peut écrire, en réunissant ces deux résultats :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \qquad \text{c. q. f. d}$$

2° *Le carré d'un côté* a *d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, diminuée de deux fois le produit de ces deux côtés multiplié par le cosinus de l'angle* A *opposé au côté considéré.*

Suivant que l'angle A est aigu ou obtus, on a, d'après un théorème connu :

$$a^2=b^2+c^2-2b\times AD$$

ou

$$a^2=b^2+c^2+2b\times AD.$$

Mais, par définition, on a :

$$\frac{AD}{AB}=\cos A \text{ ou } \frac{AD}{AB}=-\cos A,$$

suivant que A est aigu ou obtus; on en tire, dans le premier cas, $AD=c\cos A$ et dans le second :

$$AD=-c\cos A;$$

portant ces valeurs dans les égalités correspondantes écrites plus haut, on obtient la formule unique :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — La surface du triangle est :

$$\frac{1}{2}AC\times BD;$$

mais, d'après ce qui précède, $BD = AB \sin A$; on a donc :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

c'est-à-dire que la surface du triangle est la moitié du produit de deux côtés multiplié par le sinus de l'angle compris.

283. — Nous pouvons maintenant traiter les problèmes suivants :

I. *Résoudre un triangle, connaissant un côté* a *et deux angles.*

Le troisième angle est déterminé par l'égalité :

$$A + B + C = 180°.$$

Les formules du n° précédent donnent ensuite :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

ou $$S = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

Exemple. — $a = 201^m$, $B = 38°42'$, $C = 18°14'$.

On a d'abord $A = 123°4'$;

puis :

$$\sin B = 0,6253; \quad \sin C = 0,3129; \quad \frac{1}{\sin A} = 1,1933,$$

d'où : $b = 150^m$, $c = 75^m$, $S = 4714^{mq}$.

II. *Résoudre un triangle, connaissant deux côtés* b *et* c *et l'angle compris* A.

On aura d'abord, d'après la deuxième proposition du n° précédent :

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A};$$

on achèvera à l'aide des formules :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \quad \sin C = \frac{c \sin A}{a}, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Comme vérification on devra avoir :

$$A + B + C = 180°.$$

Exemple. — $b = 150^m$, $c = 75°$, $A = 123°4'$.

On a :

$$\cos A = -0{,}5456, \text{ d'où l'on tire } a = 201^m.$$

On a ensuite

$$\sin A = 0{,}8381,$$

d'où l'on tire :

$$\sin B = 0{,}6254; \qquad \sin C = 0{,}3127$$

et finalement :

$$B = 38°42', \qquad C = 18°14', \qquad S = 4714^{mq}.$$

III. *Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés* a, b, c.

Les angles seront donnés par les formules suivantes qui résultent de la seconde proposition du n° précédent :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac},$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Quant à la surface, on la calculera par la formule simple du n° 243 :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Comme vérification on devra avoir $A + B + C = 180°$.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le plus grand des trois côtés donnés soit plus petit que la somme des deux autres.

Dès que l'on connaît l'un des angles, A, par exemple, on

peut encore achever le problème en se servant des formules du problème précédent :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \quad \sin C = \frac{c \sin A}{a}, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Exemple. — $a = 201^{m}$, $b = 150^{m}$, $c = 75^{m}$.

On trouve :

$$\cos A = -0{,}5456, \quad \cos B = 0{,}7803, \quad \cos C = 0{,}9498.$$

et l'on en déduit :

$$A = 123^\circ 4', \quad B = 38^\circ 42', \quad C = 18^\circ 14', \quad S = 4714^{mq}.$$

EXERCICES

1. — Calculer les diverses lignes trigonométriques d'un angle a, connaissant :

$$1^\circ \ \sin a = \frac{3}{4}, \quad 2^\circ \ \cos a = \frac{5}{6}, \quad 3^\circ \ \operatorname{tg} a = \frac{47}{58},$$

$$\sin a = \frac{7}{11}, \quad \cos a = -\frac{19}{23}, \quad \operatorname{tg} a = -\frac{513}{49},$$

$$\sin a = \frac{2}{13}, \quad \cos a = \frac{18}{37}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{824}{37}.$$

2. — Trouver une formule permettant de calculer tg $2a$, connaissant tg$a$. (On se servira des résultats obtenus en étudiant les lignes brisées régulières circonscrites à un arc de cercle, et on obtiendra la formule :

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.)$$

3. — Montrer comment on pourrait calculer directement la tangente d'un angle donné.

4. — Déterminer, à l'aide des tables, les lignes trigonométriques des angles :

$$25^\circ 14', \ 37^\circ 43', \ 58^\circ 59', \ 85^\circ 11', \ 94^\circ 13', \ 117^\circ 54', \ 175^\circ 14'.$$

5. — Quels sont les angles définis par les égalités :

$$\sin a = 0{,}3745, \quad \cos a = 0{,}8540, \quad \operatorname{tg} a = 0{,}3870,$$

$$\sin a = 0{,}9847, \quad \cos a = -0{,}3789, \quad \operatorname{tg} a = -0{,}4550,$$

$$\sin a = 0{,}0345, \quad \cos a = 0{,}1145, \quad \operatorname{tg} a = 2{,}5747,$$

$$\frac{1}{\sin a} = 2,3582, \quad \frac{1}{\cos a} = -1,3479, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} a} = 0,2024,$$

$$\frac{1}{\sin a} = 1,4850, \quad \frac{1}{\cos a} = 2,1872, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} a} = 3,5345,$$

$$\frac{1}{\sin a} = 1,7249, \quad \frac{1}{\cos a} = -3,1515, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} a} = -1,4774?$$

6. — Dans un triangle on a :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

En déduire les formules :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

où l'on a posé

$$2p = a + b + c.$$

7. — Dans un triangle on a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

R désignant le rayon du cercle circonscrit.

8. — Dans un triangle ABC, on mène la hauteur AP et la bissectrice intérieure AF. On peut calculer facilement le segment PF que l'on trouve égal à $\frac{2(b-c)p(p-a)}{a(b+c)}$; en outre, l'angle PAF est égal à $\frac{B-C}{2}$; on en déduit :

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{PF}{AP} = \frac{b-c}{b+c} \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

et la formule définitive :

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

9. — Résoudre un triangle rectangle avec les données suivantes :

$$a = 37^{m},50, \ B = 38^{\circ}4' \ ; \quad b = 64^{m},50, \ B = 8^{\circ}52';$$
$$a = 104^{m},5 \ , \ b = 37^{m},48;$$

$a = 56^m,84,\ C = 46°55'$; $b = 36^m,84,\ C = 49°3'$;
$a = 105^m,4$, $c = 98^m,05$;

$a = 45^m,72,\ B = 21°54'$; $c = \ 8^m,94,\ B = 11°45'$;
$b = \ 82^m,43,\ c = 57^m,91$.

10. — Résoudre un triangle avec les données suivantes :

$a = 10^m,48$;	$B = \ 35°4'$;	$C = \ 104°48'$.
$a = 54^m,55$;	$A = \ 33°52'$;	$B = \ \ 52°6'$.
$a = 45^m.94$;	$A = \ 45°47'$;	$B = \ \ 44°36'$.
$b = 10^m,97$;	$c = 54^m,09$;	$A = \ \ 24°18'$.
$b = 45^m,37$;	$c = 18^m,26$;	$A = \ 150°48'$.
$a = 70^m,45$;	$b = 85^m,70$:	$c = 104^m,91$.
$a = 22^m,35$;	$b = 29^m,80$;	$c = \ 37^m,25$.

N.-B. — Les résultats obtenus en résolvant les divers exercices qui précèdent devront toujours être vérifiés, à l'aide de l'une au moins des nombreuses formules qui ont été indiquées, soit dans le texte même, soit dans les exercices.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

LIVRE V

LE PLAN ET LA LIGNE DROITE

§ 1er. — Notions préliminaires.

284. — Ainsi que nous l'avons déjà dit, le *plan* est une surface telle que toute droite qui joint deux de ses points y est contenue tout entière.

De cette définition, nous avons conclu les propositions suivantes, que nous rappelons ici :

1° *Par une droite* AB *et un point* C *en dehors de cette ligne, on peut faire passer un plan et un seul.*

2° *Par trois points* A, B, C *non en ligne droite, on peut faire passer un plan et un seul.*

3° *Par deux droites* AB, AC *qui se coupent, on peut faire passer un plan et un seul.*

Nous pouvons ajouter que :

4° *Par deux droites parallèles* AB, CD, *on peut faire passer un plan et un seul.*

En effet, d'après la définition même (**54**), deux droites parallèles sont dans un même plan, de sorte qu'il passe un plan par les deux droites données; d'ailleurs, ce plan est unique, puisqu'il contient l'une des droites AB, et un point quelconque C de l'autre, et que, par une droite et un point en dehors, on ne peut faire passer qu'un seul plan (1°).

285. — Une droite AB ne peut pas avoir plus d'un point commun avec un plan P sans être contenue tout entière dans ce plan : ceci résulte de la définition même du plan.

Si la droite et le plan ont un point commun C, on dit qu'ils se *coupent* (*fig.* 223); le point C divise la droite en deux demi-droites CA, CB situées de part et d'autre du plan.

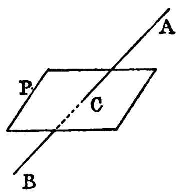


Fig. 223.

Si la droite et le plan n'ont aucun point commun, si loin qu'on les prolonge, on dit que *la droite est parallèle au plan*, ou que *le plan est parallèle à la droite*.

286. — *Si deux plans* P *et* Q *se coupent, leur intersection est une ligne droite* AB (*fig.* 224); car si A et B sont deux points communs aux deux plans, 1° la droite AB est située dans chacun d'eux, d'après la définition du plan; 2° si C est un autre point de l'intersection, il est nécessairement sur la droite AB, sans quoi, par les trois points A, B, C non en ligne droite, on pourrait faire passer deux plans distincts P et Q, ce que nous savons impossible.

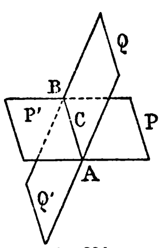


Fig. 224.

Chacun des deux plans, P par exemple, est partagé par l'autre Q en deux demi-plans situés de part et d'autre de ce plan Q.

Si deux plans P *et* Q *n'ont aucun point commun, si loin qu'on les prolonge, on dit qu'ils sont parallèles.*

287. — Deux droites dans l'espace peuvent être situées dans un même plan, ou non.

Dans le premier cas, elles peuvent se couper ou être parallèles.

Dans le second cas, elles ne peuvent ni se couper, ni être parallèles, puisque alors elles détermineraient un plan. Dans le premier cas, le plan passant par l'une et un point de la seconde contient celle-ci tout entière; dans le second

cas, tout plan passant par l'une et un point de la seconde coupe celle-ci.

Pour démontrer que deux droites dans l'espace sont parallèles, il ne suffit pas de faire voir qu'elles n'ont aucun point commun; il faut encore prouver qu'elles sont dans un même plan.

Par un point C *de l'espace, on peut mener une parallèle et une seule à une droite donnée* AB.

La droite cherchée est, en effet, située dans le plan déterminé par la droite AB et le point C; et l'on sait (**57**) que dans un plan on peut mener par un point une parallèle et une seule à une droite donnée.

§ 2. — Droite et plan perpendiculaires.

288. Définition. — Si une droite AB rencontre un plan P en un point A, et est perpendiculaire à toute droite AM située dans le plan P et passant par A, on dit que *la droite est perpendiculaire au plan* ou que *le plan est perpendiculaire à la droite* (*fig.* 225).

Plus brièvement, on dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan, si elle est perpendiculaire à toute droite passant par son pied dans le plan.

Remarque. — Il est bien entendu que, quand nous disons que deux droites qui se rencontrent sont perpendiculaires, cela veut dire qu'elles sont perpendiculaires dans le plan qui les contient.

De même, l'angle de deux droites qui se rencontrent est l'angle qu'elles forment dans le plan qui les contient.

Théorème I

289. — Si une droite AB rencontre un plan P en A, et est perpendiculaire à deux droites AM, AN situées dans ce plan et passant en A, elle est perpendiculaire au plan P (*fig.* 225).

Il faut démontrer que la droite AB est perpendiculaire à toute droite AQ passant par son pied dans le plan P.

Soit B un point quelconque de la droite AB et prolongeons AB de l'autre côté du plan d'une longueur AB′ égale à AB.

Soit Q un point quelconque de la droite AQ et menons par Q une droite qui coupe les deux droites données AM et AN en M et N.

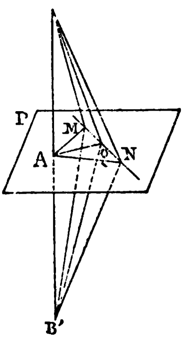


Fig. 225.

La droite MA étant perpendiculaire sur BB′ en son milieu A, on a (**50**) BM = B′M; on verra de même que BN = B′N.

Les deux triangles BMN, B′MN sont par suite égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun (MN commun, BM = B′M, et BN = B′N d'après ce qui précède). L'égalité des angles BMQ, B′MQ en résulte, et par suite l'égalité des triangles BMQ, B′MQ qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (MQ commun, BM = B′M).

On en déduit l'égalité des côtés BQ et B′Q, de sorte que le triangle BQB′ est isocèle : or, dans ce triangle, QA est, par construction, la médiane de la base; donc, QA est aussi perpendiculaire sur BB′, c. q. f. d.

Théorème II

290. — Par un point donné, on peut mener un plan perpendiculaire sur une droite donnée, et l'on ne peut en mener qu'un.

1° Supposons le point donné A sur la droite donnée XY (*fig.* 226).

Menons deux plans quelconques R, S par la droite XY, et dans chacun de ces plans menons les perpendiculaires AB, AC sur la droite XY. Le plan P déterminé par les droites AB et AC est perpendiculaire à XY, d'après le théorème précédent, puisque XY est perpendiculaire aux

deux droites AB, AC passant par son pied dans le plan P.

D'ailleurs, il n'existe pas d'autre plan perpendiculaire en A à XY. En effet, soit P′ un tel plan; son intersection avec le plan R est perpendiculaire à XY, d'après la définition (288), et par suite coïncide avec AB, puisque, dans un plan, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite par un point pris sur cette droite (19). De même l'intersection des plans P′ et S coïncide avec AC. Le plan P′ contenant les deux droites AB et AC coïncide par suite nécessairement avec le plan P.

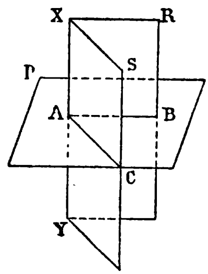


Fig. 226.

2° Supposons le point donné O en dehors de la droite donnée ZT (*fig.* 227).

Considérons la figure précédente et transportons dans l'espace l'ensemble formé par la droite XY et le plan P, de façon que XY vienne coïncider avec ZT; puis faisons-le glisser le long de ZT de façon que le plan P vienne passer par le point O : nous aurons alors un plan P passant par le point O et perpendiculaire en A à la droite ZT.

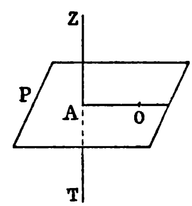


Fig. 227.

D'ailleurs, il n'existe pas d'autre plan passant en O et perpendiculaire à ZT. En effet, soit P′ un tel plan; l'intersection de ce plan et du plan déterminé par le point O et la droite ZT est perpendiculaire à ZT, d'après la définition, et par suite coïncide avec OA, puisque OA est perpendiculaire à ZT, et située dans le plan OZT, et que, dans un plan, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite par un point pris en dehors de cette droite (28). Le plan P′ est donc, comme le plan P, perpendiculaire à ZT en A, et par suite coïncide avec le plan P, d'après ce qui a été demontré dans le premier cas.

Théorème III

291. — Par un point donné, on peut mener une droite perpendiculaire à un plan donné, et l'on ne peut en mener qu'une.

1° Supposons le point donné O dans le plan donné Q (*fig*. 228).

Considérons la figure 226, et transportons dans l'espace l'ensemble formé par la droite XY et le plan P, de façon que le plan P vienne coïncider avec le plan Q, le point A coïncidant lui-même avec le point O : nous aurons alors une droite XY perpendiculaire en O au plan Q.

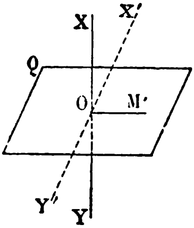


Fig. 228.

D'ailleurs, il n'existe pas d'autre droite perpendiculaire en O au plan Q. En effet, soit X'Y' une telle droite : le plan des deux droites XY, X'Y' coupe le plan Q suivant une droite OM, et d'après la définition (288) les deux droites XY, X'Y' sont perpendiculaires sur OM, ce qui est impossible d'après le théorème du n° **19**.

2° Supposons le point donné O en dehors du plan donné Q (*fig*. 229).

Considérons la figure 226, et transportons dans l'espace l'ensemble formé par la droite XY et le plan P, de façon que le plan P vienne coïncider avec le plan Q, puis faisons glisser le plan P sur le plan Q, de façon que la droite XY passe par le point O : nous aurons alors une droite XY passant par le point O et perpendiculaire en A au plan Q.

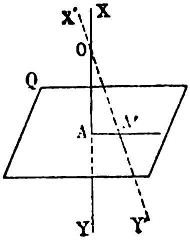


Fig. 229.

D'ailleurs, il n'existe pas d'autre droite passant par O et perpendiculaire au plan Q. En effet, soit X'Y' une telle droite et A' le point où elle coupe le plan Q. Le plan

des deux droites XY, X'Y' coupe le plan Q suivant la droite AA', et, d'après la définition, les deux droites XY, X'Y' sont perpendiculaires sur AA', ce qui est impossible d'après le théorème du n° **29**.

292. — Si une droite rencontre un plan sans lui être perpendiculaire, on dit qu'elle est *oblique* à ce plan.

Théorème IV

Si d'un point O pris hors d'un plan P, on mène à ce plan la perpendiculaire OA et diverses obliques OB, OC, OD,

1° La perpendiculaire OA est plus courte que toute oblique OB;

2° Une oblique OB est supérieure, égale ou inférieure à une oblique OC ou OD suivant que la distance AB du pied de la première au pied de la perpendiculaire est supérieure, égale ou inférieure à la distance AC ou AD du pied de la seconde au pied de la perpendiculaire (*fig.* 230).

1° Dans le triangle rectangle OAB, on a $OA < OB$.

2° Supposons $AB = AC$. Les deux triangles rectangles OAB, OAC sont égaux comme ayant les côtés de l'angle droit égaux ($AB = AC$ et OA commun) : on en déduit $OB = OC$.

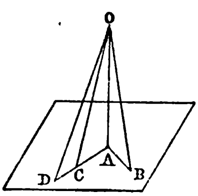


Fig. 230.

3° Supposons $AB < AD$. Prenons sur AD un point C tel que $AC = AB$; d'après ce qui précède $OB = OC$; mais, dans le plan OAD, l'oblique OD s'écartant du pied de la perpendiculaire plus que l'oblique OC, on a (**45**) $OD > OC$, et par suite $OD > OB$, c. q. f. d.

Corollaire. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan est la ligne la plus courte qu'on puisse mener du point au plan : aussi l'appelle-t-on distance du point au plan.*

293. — Les réciproques des propositions précédentes

sont évidemment vraies en vertu du principe général du n° 39. On peut les énoncer ainsi : *Si l'on considère plusieurs droites* OA, OB, OC, OD *menées d'un point* O *à un plan* P :

1° *Si la droite* OA *est plus courte que toute autre droite menée du point* O *au plan, elle coïncide avec la perpendiculaire menée de* O *sur le plan;*

2° *La distance* AB *du pied d'une oblique* OB *au pied de la perpendiculaire est supérieure, égale ou inférieure à la distance* AC *ou* AD *du pied d'une autre oblique* OC *ou* OD *suivant que la première oblique est supérieure, égale ou inférieure à la seconde.*

Théorème V

294. — Soit A le pied d'une perpendiculaire OA à un plan P; soit B le pied de la perpendiculaire menée du point A sur une droite CD du plan P, et soit O un point quelconque de la droite OA : la droite OB est perpendiculaire sur la droite CD (*fig.* 231).

Prenons sur la droite CD deux points C et D équidistants du point B : les distances AC et AD sont alors égales puisque AB est perpendiculaire sur CD en son milieu (**50**). Les triangles OAC, OAD sont rectangles en A d'après l'hypothèse, et ont les côtés de l'angle droit égaux (AC = AD et OA commun); ils sont par suite égaux, de sorte que OC = OD.

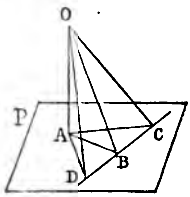


Fig. 231.

Le triangle OCD est donc isocèle, et OB qui est la médiane de la base est aussi perpendiculaire sur cette base CD, c. q. f. d.

Remarque. — Ce théorème est connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires.*

Exercices

1. — Quelle est la surface engendrée par une droite qui passe par un point donné et s'appuie sur une droite donnée?

2. — Quelle est la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur une droite donnée et reste parallèle à une seconde droite donnée rencontrant la première?

3. — Le lieu géométrique des droites perpendiculaires à une droite donnée XY en un point A de cette droite est le plan perpendiculaire à XY mené par A.

4. — Le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés A et B est le plan perpendiculaire sur la droite AB en son milieu.

5. — Les plans perpendiculaires aux trois côtés d'un triangle en leurs milieux se coupent suivant une même droite qui est le lieu géométrique des points équidistants des trois sommets du triangle. X

6. — Soient donnés quatre points dans l'espace non situés dans un même plan. Les plans perpendiculaires sur les six droites qui joignent ces quatre points deux à deux en leurs milieux se coupent en un même point qui est équidistant des quatre points donnés.

7. — Le lieu géométrique des points d'un plan P situés à une distance constante l d'un point O pris en dehors de ce plan est une circonférence ayant pour centre le pied A de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan. Si h est la distance du point O au plan, et R le rayon de cette circonférence, on a :

$$l^2 = h^2 + R^2.$$

Applications. — Calculer R, sachant que $h = 5^m,2$ et $l = 6^m,5$.
Réponse. — $R = 3^m,9$.
Calculer h, sachant que $l = 9^m,1$ et $R = 3^m,5$.
Réponse. — $h = 8^m,4$.
Calculer l, sachant que $h = 11^m,52$ et $R = 10^m,40$.
Réponse. — $l = 15^m,52$.

8. — Réciproque du théorème des trois perpendiculaires. — En se reportant à l'énoncé de ce théorème, démontrer que, si OB est perpendiculaire sur CD, AB est aussi perpendiculaire sur CD.

9. — Mener par un point donné une droite qui rencontre deux droites données non situées dans le même plan.

§ 3. — **Droites et plans parallèles.**

Théorème VI

295. — Si une droite AB coupe un plan P en A, toute droite CD parallèle à AB coupera aussi le plan P (*fig.* 232). X

En effet, soit AM l'intersection du plan P avec le plan

des deux droites parallèles AB, CD ; AM rencontrant AB rencontrera sa parallèle CD en un certain point C (58) : ce point C est le point d'intersection de CD avec le plan P.

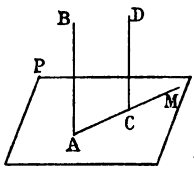


Fig. 232.

D'ailleurs CD ne peut être dans le plan P, sans quoi elle coïnciderait avec AM et ne serait pas parallèle à AB.

296. Corollaire. — *Si deux droites* AB, CD *sont parallèles, tout plan parallèle à la première ou contenant la première est parallèle à la seconde ou la contient;* car, s'il la coupait, il couperait aussi la première, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème VII

297. — Si deux droites AB, CD sont parallèles à une même droite XY, elles sont parallèles entre elles (*fig.* 233).

D'abord AB et CD ne peuvent se rencontrer, sans quoi de leur point d'intersection on pourrait mener deux parallèles à XY, ce qui est impossible (**287**). Il suffit donc

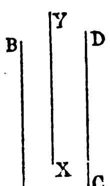


Fig. 233.

de montrer que AB et CD sont dans un même plan : or, si le plan P qui passe par AB et un point quelconque C de CD ne contenait pas CD, il couperait cette droite, et par suite aussi sa parallèle XY d'après le théorème précédent. Le plan P coupant la droite XY couperait aussi sa parallèle AB en vertu du même théorème; mais ceci est absurde, puisque par hypothèse P contient AB. Il faut donc que le plan P contienne la droite CD, ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME VIII

298. — Si une droite AB est perpendiculaire en B à un plan P, toute droite CD parallèle à AB sera perpendiculaire au même plan (*fig.* 234).

Le plan P rencontre CD en un certain point D (**295**). Dans le plan ABCD, AB est, par hypothèse, perpendiculaire à BD, et par suite il en est de même de sa parallèle CD (**59**). Soit dans le plan P EG perpendiculaire à BD en D et A un point quelconque de AB. D'après le théorème des trois perpendiculaires, la droite EG perpendiculaire à BD est aussi perpendiculaire à AD, et par suite perpendiculaire au plan DAB; or CD est dans ce plan, donc EG est aussi perpendiculaire à CD d'après la définition des droites et plans perpendiculaires. En résumé, la droite CD est perpendiculaire aux droites BD et EG et par suite perpendiculaire au plan P, c. q. f. d.

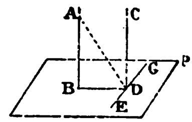


Fig. 234.

THÉORÈME IX

299. — Si deux droites AB, CD sont perpendiculaires à un même plan P, elles sont parallèles (*fig.* 234).

Par un point quelconque de CD menons la parallèle à AB ; elle sera perpendiculaire au plan P d'après le théorème précédent : mais par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à un plan; donc la droite CD coïncide avec cette parallèle, c. q. f. d.

THÉORÈME X

300. — Si une droite AB, non contenue dans un plan P, est parallèle à une droite CD de ce plan, elle est parallèle au plan P (*fig.* 235).

Car si le plan P coupait la droite AB, il couperait sa parallèle CD (**295**), ce qui est contre l'hypothèse.

Remarque. — Ce théorème nous montre l'existence des droite et plan parallèles.

Théorème XI

301. — Si une droite AB est parallèle à un plan P, l'intersection CD d'un plan quelconque Q mené par AB avec le plan P est une droite parallèle à AB (*fig.* 235).

En premier lieu, AB et CD sont dans un même plan Q; en second lieu, AB et CD ne peuvent se rencontrer, car leur point d'intersection, situé sur CD, serait dans le plan P, ce qui est absurde, puisque AB est parallèle à ce plan. Donc AB et CD sont parallèles, c. q. f. d.

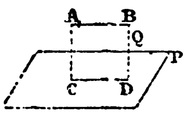


Fig. 235.

302. Corollaire. — *Si par un point* C *d'un plan* P *on mène une parallèle* CD *à une droite* AB *parallèle au plan* P, *la droite* CD *est tout entière située dans le plan* P.

En effet, le plan ABC coupe le plan P suivant une parallèle à AB, avec laquelle coïncide la droite CD, puisque par un point on peut mener une seule parallèle à une droite.

Théorème XII

303. — Si deux plans P et Q sont parallèles à une même droite XY, leur intersection AB est parallèle à cette droite (*fig.* 236).

Car, si par un point quelconque A de l'intersection on mène la parallèle à XY, elle est contenue tout entière dans chacun des deux plans (**302**) et par suite coïncide avec AB.

Théorème XIII

304. — Si un plan R coupe deux plans parallèles P et Q, les droites d'intersection AB et CD sont parallèles (*fig.* 237).

En premier lieu, les droites AB et CD sont dans un

même plan ; en second lieu, elles ne peuvent se rencontrer : car leur point d'intersection appartiendrait à la fois aux deux plans P et Q qui ne seraient pas parallèles.

Théorème XIV

305. — Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite AC qui coupe le premier en A coupe le second (*fig.* 237).

Faisons passer un plan R par la droite AC et un point quelconque D du plan Q : ce plan coupera les deux plans P et Q suivant deux droites parallèles AB, DE, et la droite

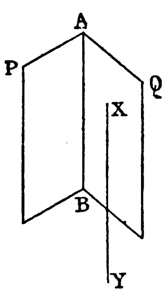


Fig. 236.

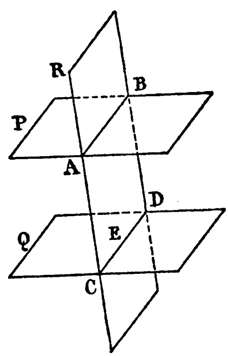


Fig. 237.

AC qui coupe l'une, coupera l'autre en un certain point C (58) : ce point C appartiendra d'ailleurs au plan Q, c. q. f. d.

306. Corollaire. — *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles, toute droite* XY, *parallèle au premier ou contenue dans le premier, sera parallèle au second ou contenue dans le second.*

Car, si elle coupait le second, elle couperait le premier, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème XV

307. — Si deux plans P et Q sont parallèles, tout plan R qui coupe le premier suivant une droite AB coupe le second (*fig.* 237).

Par un point A de AB menons dans le plan R une droite quelconque AC ; cette droite coupe le plan P et par suite le plan Q en un certain point C d'après le théorème précédent : les plans R et Q, ayant un point commun C, se coupent suivant une droite CD.

308. Corollaire. — *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles à un même plan R, ils sont parallèles entre eux.*

Car, si P coupait Q, il couperait R, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème XVI

309. — Par un point donné A, on peut mener un plan parallèle à un plan donné A et l'on ne peut en mener qu'un (*fig.* 238).

Par le point A menons deux droites AB, AC parallèles à deux droites A'B', A'C' quelconques du plan P, et par suite parallèles au plan P (**300**). Le plan Q des deux droites AB, AC est parallèle au plan P : car, si ces deux plans se coupaient, leur intersection serait à la fois parallèle aux deux droites AB, AC (**303**), ce qui est impossible.

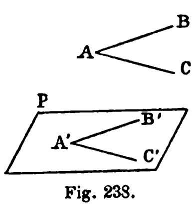


Fig. 238.

D'ailleurs, il n'existe pas d'autre plan parallèle au plan P passant par le point A : car, si Q' était un tel plan, le plan Q' coupant le plan Q couperait le plan P parallèle à Q (**307**), et par suite ne serait pas parallèle au plan P.

Théorème XVII

310. — Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Car, s'ils avaient un point commun, on pourrait mener de ce point deux plans perpendiculaires sur une même droite, ce qui est impossible (**290**).

Théorème XVIII

311. — Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite AB perpendiculaire au premier est perpendiculaire à l'autre (*fig.* 239).

La droite AB coupe le plan Q en B; par A dans le plan P menons les deux droites AC, AD et par B les deux parallèles à ces droites BE, BF, ces deux droites seront dans le plan Q (**302**). Dans le plan ACBE, la droite AB perpendiculaire à AC est aussi perpendiculaire à BE parallèle à AC; on verra de même que AB est perpendiculaire à BF; la droite AB étant perpendiculaire aux deux droites BE, BF du plan Q est perpendiculaire à ce plan (**289**), c. q. f. d.

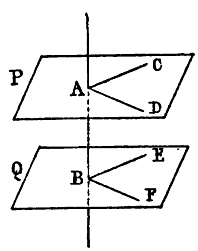


Fig. 239.

Théorème XIX

312. — Deux droites parallèles AB, CD comprises entre deux plans parallèles P et Q sont égales (*fig.* 240).

Le plan ABCD coupe les plans P et Q suivant deux droites AC, BD parallèles (**304**) ; la figure ABCD est donc un parallélogramme, et l'on a AB = CD, c. q. f. d.

Si, en particulier, AB et CD sont perpendiculaires aux

plans P et Q, ce sont les distances des points A et C au plan Q; ces distances étant égales, on dit que *deux plans parallèles sont partout équidistants.*

Théorème XX

313. — Trois plans parallèles P, Q, R interceptent sur deux droites ABC, A′B′C′ quelconques des segments proportionnels (*fig.* 241).

Par A menons une parallèle à A′B′C′ qui coupe les

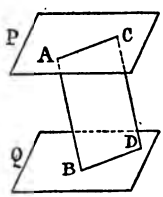


Fig. 240.

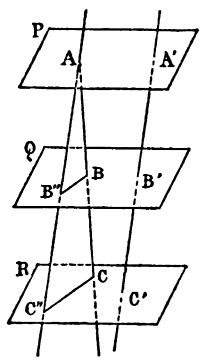


Fig. 241.

plans Q et R en B″ et C″. D'après le théorème précédent, on a :

$$A'B' = AB'', \quad B'C' = B''C''.$$

En outre, les droites BB″, CC″ sont parallèles, et l'on a dans le plan ABCB″C″ (156) :

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''};$$

on a donc aussi

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}, \text{ c. q. f. d.}$$

Ceci s'applique, quelle que soit la disposition de la figure.

Théorème XXI

314. — Si deux angles BAC, B'A'C' ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens, ils sont égaux, et leurs plans sont parallèles (*fig.* 242).

Les plans des deux angles sont parallèles en vertu du n° 309.

Menons maintenant par un point B quelconque sur AB, une parallèle à AA' qui coupe A'B' en B', et de même par un point C quelconque sur AC une parallèle à AA' qui coupe A'C' en C'.

Les figures ABA'B', ACA'C' sont des parallélogrammes ; de sorte que l'on a :

$$A'B' = AB, \quad A'C' = AC,$$

et aussi

$$BB' = CC' = AA'.$$

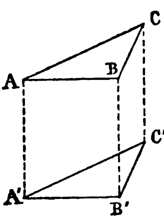


Fig. 242.

La figure BC B'C' est alors aussi un parallélogramme comme ayant deux côtés opposés égaux et parallèles, et l'on a BC = B'C'. Les deux triangles ABC, A'B'C' ont par suite les trois côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux, et l'on a $A = \hat{A}'$, c. q. f. d.

Remarque. — On verrait immédiatement comme au n° 66 que deux angles dont les côtés sont respectivement parallèles et de sens contraires sont égaux, et de même que deux angles dont deux côtés sont parallèles et de même sens et les deux autres parallèles et de sens contraire sont supplémentaires. Dans tous les cas, les plans des deux angles sont parallèles.

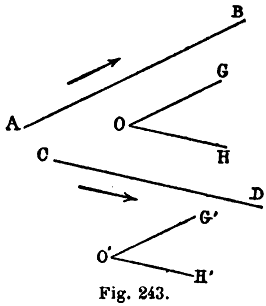


Fig. 243.

315. — Considérons dans l'espace deux droites dirigées dans des sens donnés AB, CD qui ne se rencontrent pas (*fig.* 243). Par un point quelconque O de l'espace, menons deux demi-droites OG, OH parallèles à AB et CD et respectivement de même sens. D'après le théorème précédent, l'angle GOH restera constant quand le point O variera, car si G'O'H' est une seconde position de cet angle, les deux angles GOH, G'O'H' sont égaux en vertu du numéro précédent. Cet angle est appelé l'angle des deux droites données AB, CD. Si cet angle est droit, les deux droites sont dites perpendiculaires : ainsi une verticale quelconque est perpendiculaire à une horizontale quelconque.

Exercices

1. — Quel est le lieu géométrique des droites parallèles à un plan menées par un point donné?

2. — Une droite et un plan perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

3. Si deux plans sont respectivement parallèles à deux plans qui se coupent, l'intersection des deux premiers est parallèle à l'intersection des deux seconds.

4. — Quel est le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'un plan donné?

5. — Mener par un point un plan parallèle à deux droites qui ne se coupent pas.

6. — Mener une droite parallèle à une droite donnée et s'appuyant sur deux droites données.

7. — Soient quatre points A, B, C, D dans l'espace; en les joignant successivement deux à deux, on forme un quadrilatère *gauche;* la figure formée en joignant deux à deux les milieux des côtés consécutifs de ce quadrilatère est un parallélogramme.

§ 4. — Les angles dièdres. — Les plans perpendiculaires.

316. — Un *angle dièdre* ou simplement un *dièdre* est la figure formée par deux demi-plans P et Q limités à une même droite AB (*fig.* 244).

La droite AB est l'*arête* du dièdre; les demi-plans P

et Q en sont les *faces*. On désigne un dièdre en nommant son arête s'il ne doit pas en résulter d'ambiguïté; dans le cas contraire, c'est-à-dire si plusieurs dièdres ont la même arête, on désigne un dièdre par quatre lettres : une sur chacune des faces et deux sur l'arête qu'on énonce entre les deux autres. Ainsi, dans la figure 244, on dira le dièdre AB, et, dans la figure 245, on dira le dièdre PABQ, ou le dièdre PABR, ou le dièdre QABR.

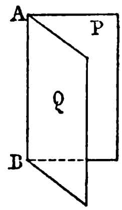


Fig. 244.

Deux angles dièdres sont *adjacents* s'ils ont la même arête et une face commune, et si, en outre, ils sont situés de part et d'autre de la face commune. Ainsi (*fig.* 245) les dièdres PABQ, RABQ sont adjacents; les dièdres PABQ, PABR ne sont pas adjacents.

317. — On voit immédiatement que la théorie des angles dièdres est tout à fait analogue à celle des angles; aussi ne donnerons-nous aucun détail, nous contentant d'énoncer les théorèmes fondamentaux, et renvoyant pour les explications à celles qui ont été données dans la théorie des angles (§ 1er, liv. Ier).

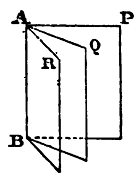


Fig. 245.

On comparera deux angles dièdres comme nous avons comparé deux angles; en particulier, deux dièdres sont égaux s'ils peuvent coïncider.

L'étude de l'addition des dièdres sera rendue facile grâce aux mêmes considérations que celles qui nous ont servi dans l'étude de l'addition des angles. Cette étude devient d'ailleurs intuitive si l'on remarque que l'angle dièdre est une grandeur géométrique engendrée par la rotation continue d'un demi-plan mobile Q tournant autour d'une droite AB comme charnière à partir d'une position fixe P (*fig.* 246).

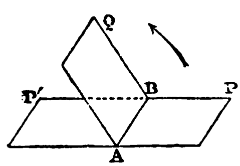


Fig. 246.

Le dièdre PABQ va en croissant constamment et d'une façon continue quand le demi-plan Q qui l'engendre tourne autour de la droite AB dans le sens de la flèche, en partant de la position ABP pour arriver jusqu'à la position ABP'.

Si l'on imagine que ce mouvement de rotation du demi-plan Q puisse se continuer indéfiniment au delà de la position ABP', on comprend immédiatement ce qu'on doit entendre quand on parle de la somme d'un nombre quelconque d'angles dièdres.

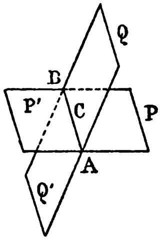


Fig. 247.

318. — Deux dièdres sont *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre. Tels sont les deux dièdres PABQ, P'ABQ' (*fig.* 247).

Le plan *bissecteur* d'un dièdre est le demi-plan qui le partage en deux parties égales.

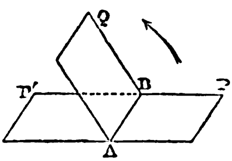


Fig. 248.

Un demi-plan ABQ qui coupe un plan P suivant une droite AB forme avec ce plan deux dièdres adjacents PABQ, P'ABQ (*fig.* 248); en général, ces deux dièdres sont inégaux, et alors le plan Q est *oblique* sur le plan P. Si ces deux angles sont égaux, le plan Q est *perpendiculaire* sur le plan P.

Théorème XXII

319. — Par une droite AB d'un plan P, et d'un côté donné de ce plan, on peut mener un demi-plan perpendiculaire au plan P et l'on ne peut en mener qu'un (même démonstration qu'au n° 19, et ainsi des théorèmes suivants).

320. — Un dièdre *droit* est un dièdre dont une des faces est perpendiculaire sur l'autre.

Théorème XXIII

Tous les angles dièdres droits sont égaux.

321. — L'angle dièdre droit peut servir d'unité.

Un dièdre est *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à un dièdre droit.

Deux dièdres sont *complémentaires* ou *supplémentaires* si leur somme vaut un dièdre droit ou deux dièdres droits.

Théorème XXIV

322. — Si plusieurs demi-plans Q, R, S passent par une droite AB d'un plan P, et sont situés d'un même côté de ce plan, la somme des dièdres consécutifs ainsi formés vaut deux dièdres droits.

En particulier, les deux dièdres adjacents formés avec un plan P par un demi-plan Q qui le coupe suivant une droite AB, sont supplémentaires; et réciproquement.

Si plusieurs demi-plans Q, R, S, T, U passent par une même demi-droite AB, et sont situés les uns d'un côté, les autres de l'autre côté d'un quelconque d'entre eux prolongé indéfiniment, la somme des angles consécutifs ainsi formés autour de la droite AB vaut quatre angles dièdres droits.

Si un demi-plan Q est perpendiculaire sur un plan PP′, il en est de même de son prolongement Q′; et inversement, les demi-plans P et P′ sont perpendiculaires sur le plan QQ′.

Deux angles dièdres opposés par l'arête sont égaux.

Les plans bissecteurs des quatre dièdres formés par deux plans qui se coupent sont deux plans perpendiculaires.

323. — On appelle *angle plan* correspondant à un dièdre donné PAB (*fig.* 249) l'angle DCE que l'on forme en menant par un point quelconque C de l'arête, et dans chacune des deux faces, une perpendiculaire à cette arête.

Quel que soit d'ailleurs le point C choisi sur l'arête, l'angle plan DCE obtenu a toujours la même valeur, car si D′C′E′ est une seconde position de cet angle, les deux angles DCE, D′C′E′ sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement parallèles et de même sens.

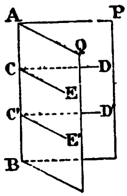


Fig. 249.

Le plan CDE est perpendiculaire à l'arête AB; réciproquement, il est clair que tout plan perpendiculaire à l'arête coupe le dièdre suivant son angle plan.

Théorème XXV

324. — L'angle plan d'un dièdre AB est supérieur, égal ou inférieur à celui d'un autre dièdre CD, suivant que le premier dièdre est supérieur, égal ou inférieur au second, et réciproquement.

Pour apercevoir immédiatement la vérité du théorème, il suffit de supposer que les deux dièdres ont la même arête et une face commune, et, en outre, qu'ils sont situés du même côté de cette face commune; le théorème est alors évident, puisque, d'après ce qui a été dit plus haut, les deux angles plans peuvent être obtenus en coupant les deux dièdres par un même plan perpendiculaire à l'arête. Les réciproques sont vraies d'après le principe général du n° **39**.

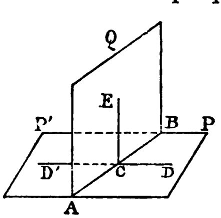


Fig. 250.

325. Corollaire. — *L'angle plan d'un dièdre droit est un angle droit, et réciproquement.*

Soit le plan Q perpendiculaire suivant AB au plan PP′; par un point quelconque C de AB, menons DD′ perpendiculaire à AB dans le plan PP′ et CE perpendiculaire à AB dans le plan Q (*fig.* 250). Les deux dièdres droits égaux PABQ, P′ABQ ont des angles plans égaux : ces angles

sont d'ailleurs les angles DCE, D'CE qui sont adjacents et supplémentaires; étant en outre égaux, ils sont droits, c. q. f. d.

Réciproquement, si l'angle DCE est droit, le dièdre PABQ est droit. En effet, l'angle D'CE est droit aussi; par suite, les dièdres PABQ, P'ABQ, ayant des angles plans égaux, sont égaux; comme ils sont déjà adjacents et supplémentaires, il en résulte qu'ils sont droits, c. q. f. d.

Théorème XXVI

326. — Le rapport de deux angles dièdres AB, A'B' est égal au rapport de leurs angles plans DCE, D'C'E' (*fig.* 251).

Supposons que le rapport des dièdres AB, A'B' soit le nombre fractionnaire $\frac{3}{5}$. Il en résulte que le dièdre AB contient trois fois le cinquième du dièdre A'B', ou qu'il existe un même dièdre contenu trois fois dans AB et cinq fois dans A'B'. Divisons donc le dièdre AB en trois parties égales, et le dièdre A'B' en cinq parties égales entre elles et aux précédentes d'après ce qui précède.

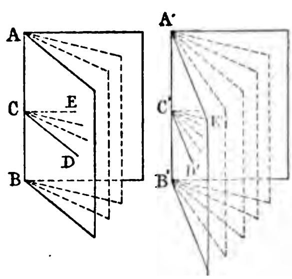


Fig. 251.

Ces dièdres partiels tous égaux auront des angles plans égaux d'après le théorème précédent; ces angles plans seront les premiers dans le plan de l'angle DCE, les seconds dans le plan de l'angle D'C'E'; l'angle DCE en contiendra donc trois, et l'angle D'C'E' en contiendra cinq. L'angle DCE contient, par suite, trois fois le cinquième de l'angle D'C'E', c'est-à-dire que le rapport des angles

plans DCE, D′C′E′ est le nombre $\frac{3}{5}$ égal au rapport des angles dièdres AB, A′B′, c. q. f. d.

327. — Il résulte de ce théorème que *les angles dièdres sont proportionnels à leurs angles plans*. Par suite, on peut énoncer le théorème suivant (**112**) :

Théorème XXVII

Un angle dièdre a même mesure que son angle plan, à condition que l'on prenne pour unité d'angle dièdre l'angle dièdre qui a l'unité d'angle pour angle plan.

Si, par exemple, l'angle droit est l'unité d'angle, il faudra prendre l'angle dièdre droit pour unité d'angle dièdre (**325**).

Si le degré est l'unité d'angle, il faudra prendre pour unité d'angle dièdre la quatre-vingt-dixième partie de l'angle dièdre droit, etc.

Plus brièvement, on se contente de dire qu'*un angle dièdre a même mesure que son angle plan*, et on évalue les angles dièdres en degrés, minutes et secondes comme leurs angles plans.

Théorème XXVIII

328. — Si deux plans P et Q sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite CD menée dans Q perpendiculairement à l'intersection AB est perpendiculaire à P (*fig.* 252).

Menons par le point D la perpendiculaire DE à AB dans le plan P. L'angle CDE est l'angle plan du dièdre PABQ, et par suite est droit ; la droite CD est donc perpendiculaire à la droite DE ; comme elle est déjà, par hypothèse, perpendiculaire à la droite AB, elle est perpendiculaire au plan P de ces deux droites, c. q. f. d.

Théorème XXIX

329. — Si une droite CD est perpendiculaire à un plan P, tout plan Q passant par cette droite est perpendiculaire au plan P (*fig.* 252).

Soit AB l'intersection des deux plans, et par le point D menons DE perpendiculaire à AB dans le plan P. CD perpendiculaire au plan P est perpendiculaire à AB et à DE : il en résulte que l'angle CDE est droit et que cet angle est l'angle plan du dièdre PABQ. Ce dièdre est par suite droit (**325**), c. q. f. d.

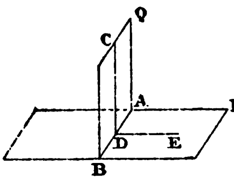


Fig. 252.

Théorème XXX

330. — Si deux plans P et Q sont perpendiculaires entre eux, et que par un point C de l'un Q on mène une perpendiculaire CD à l'autre P, cette droite sera tout entière contenue dans le plan Q (*fig.* 252).

Menons, en effet, par C dans le plan A la perpendiculaire CD′ sur l'intersection AB des deux plans; cette droite sera perpendiculaire sur le plan P (**328**), et par suite elle coïncide avec la droite CD, puisque par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à un plan. La droite CD est donc bien tout entière dans le plan Q, c. q. f. d.

Théorème XXXI

331. — Si deux plans Q et R sont perpendiculaires à un troisième plan P, leur intersection CD est perpendiculaire à ce troisième plan (*fig.* 253).

Si, en effet, par un point C de l'intersection CD, on

mène une perpendiculaire au plan P, cette droite étant contenue à la fois dans chacun des plans Q et R, d'après le théorème précédent, coïncide avec l'intersection de ces deux plans, c. q. f. d.

Théorème XXXII

332. — Par une droite AB non perpendiculaire à un plan P, on peut mener un plan Q perpendiculaire au plan P et un seul (*fig.* 254).

Par un point quelconque A de AB menons la perpendiculaire AA′ sur le plan P. Le plan ABA′ est perpendiculaire sur le plan P (329) et contient la droite AB; c'est d'ailleurs le seul plan jouissant de ces propriétés; car, si Q est un tel plan, il doit contenir la perpendiculaire AA′ menée par l'un de ses points au plan P (330) et par suite il coïncide avec le plan ABA′, c. q. f. d.

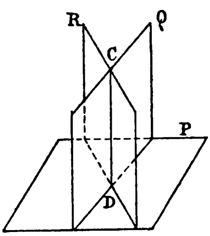


Fig. 253.

333. — La *projection* d'un point A sur un plan P est le pied A′ de la perpendiculaire menée par le point A à ce plan (*fig.* 254).

La *projection* d'une ligne est le lieu géométrique des projections de tous ses points.

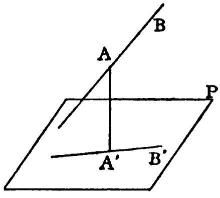


Fig. 254.

Il résulte du théorème précédent que *la projection d'une ligne droite* AB *sur un plan* P *est une autre ligne droite* A′B′, qui est l'intersection du plan P avec le plan qu'on peut lui mener perpendiculairement par la droite AB (*fig.* 254).

Si la droite AB est perpendiculaire au plan P, sa projection se réduit à un point.

Si la droite AB est parallèle à un plan P, elle est parallèle à sa projection (**301**) et réciproquement (**300**).

Théorème XXXIII

334. — Si une droite AB n'est ni parallèle ni perpendiculaire à un plan P, l'angle aigu BAB′ que cette droite fait avec sa projection AB′ sur le plan P est plus petit que l'angle BAC qu'elle forme avec toute autre droite AC passant par son pied dans le plan. — Cet angle est appelé l'angle de la droite AC et du plan P (*fig.* 255).

Sur les droites AB′ et AC prenons des longueurs égales AB′ et AC, et si B est le point de la droite AB qui se projette en B′, menons les droites BB′ et BC. Dans les triangles ABB′, ABC, le côté AB est commun, et les côtés AB′ et AC sont égaux ; mais le troisième côté BB′ du premier, perpendiculaire au plan, est plus petit que le troisième côté BC du second, qui est oblique au même plan P (**292**). Il en résulte que l'angle BAB′ du premier est plus petit que l'angle BAC du second (**38**), c. q. f. d.

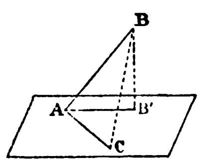


Fig. 255.

Théorème XXXIV

335. — Soient deux plans P et Q et un point A dans le plan Q; parmi toutes les droites que l'on peut mener dans le plan Q par le point A, celle qui fait le plus grand angle avec le plan P est la perpendiculaire AB abaissée sur l'intersection CD des deux plans (*fig.* 256).

Soit G un point quelconque de CD et A′ la projection de A sur le plan P ; les droites BA′ et GA′ étant les projections des droites BA et GA, il faut démontrer que l'on a $\widehat{ABA'} > \widehat{AGA'}$.

D'après le théorème des trois perpendiculaires, A'B est perpendiculaire sur CD, et l'on a par suite $A'B < A'G$; soit G' un point tel que $A'G' = A'B$; ce point sera entre les points A' et G d'après ce qui précède.

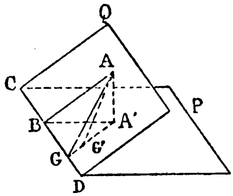


Fig. 256.

Les triangles rectangles ABA', AG'A' sont égaux, et il suffit par suite de faire voir que l'on a :

$$\widehat{AG'A'} > \widehat{AGA'};$$

or, l'angle AG'A', extérieur au triangle AGG', est égal à l'angle AGA' augmenté de l'angle GAG'; il en résulte nécessairement $\widehat{AG'A'} > \widehat{AGA'}$, c. q. f. d.

Remarque. — Si le plan P est horizontal, la droite AB est la ligne *de plus grande pente du plan* passant par A, c'est-à-dire celle qui est la plus inclinée sur l'horizon. Les diverses lignes de plus grande pente d'un plan sont toutes parallèles, puisqu'elles sont toutes perpendiculaires à CD, et font, par conséquent, toutes le même angle avec le plan P; cet angle est d'ailleurs manifestement l'angle plan du dièdre PCDQ.

Exercices

1. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants de deux plans parallèles ou non?

2. — Deux angles dièdres qui ont leurs faces parallèles deux à deux sont égaux ou supplémentaires.

3. — Si une droite est parallèle à un plan, tout plan perpendiculaire à la droite est perpendiculaire au plan.

4. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants de deux droites qui se coupent?

5. — Enoncer et démontrer sur les angles dièdres des propositions analogues à celles des nos 61 et 62.

6. — Si un angle droit a un de ses côtés parallèle à un plan P, sa projection sur le plan P est un angle droit.

7. — Si une droite est perpendiculaire à un plan Q, sa projection sur un plan P est perpendiculaire à l'intersection des plans P et Q.

8. — Une droite AB oblique à un plan P le rencontre en A. Comment varie l'angle BAC qu'elle forme avec une droite AC du plan P, lorsque celle-ci tourne autour du point A.

9. — Si l'on projette un point A sur deux plans qui se coupent P et Q, les perpendiculaires abaissées des deux projections sur l'intersection des deux plans la rencontrent au même point.

10. — Toute ligne qui se projette suivant une ligne droite sur deux plans non parallèles est une ligne droite. — Cas d'exception.

11. — Deux angles dièdres qui ont leurs arêtes parallèles et leurs faces respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.

12. — Les perpendiculaires abaissées d'un même point sur des plans parallèles à une même droite sont dans un même plan.

§ 5. — Les angles polyèdres.

336. — Un *angle polyèdre* est la figure formée par plusieurs plans qui passent par un même point S et qui sont limités à leurs intersections successives SA, SB, SC, SD... (*fig.* 257).

Le point S est le *sommet;* les demi-droites SA, SB, SC, SD... sont les *arêtes* de l'angle polyèdre; les angles ASB, BSC, CSD, DSA en sont les *faces;* les angles dièdres SA, SB, SC, SD en sont les *dièdres*.

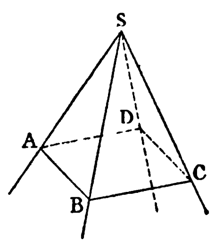


Fig. 257.

L'angle polyèdre est désigné par la lettre de son sommet seule ou suivie des lettres relatives aux diverses arêtes : ainsi on dira l'angle polyèdre S ou SABCD.

Un angle polyèdre est *convexe* s'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan indéfiniment prolongé de chacune de ses faces.

Il est évident que la section d'un angle polyèdre convexe par un plan qui rencontre toutes ses arêtes est un polygone convexe.

337. — Si l'on prolonge au delà du sommet S toutes les arêtes d'un angle polyèdre SABCD (*fig.* 258), on forme

un nouvel angle polyèdre SA'B'C'D' qui est dit le *symétrique* du premier.

Les faces correspondantes de ces deux angles polyèdres sont égales comme angles opposés par le sommet ; et il en est de même des dièdres correspondants, comme opposés par l'arête. Cependant les deux angles polyèdres ne sont pas égaux parce que leurs éléments égaux ne sont pas disposés dans le même ordre. Si, en effet, un observateur est couché sur SA la tête en S, les pieds en A, et regarde l'intérieur de l'angle polyèdre SABCD, il voit l'arête SB à sa droite, tandis que le même observateur couché sur SA', la tête en S, les pieds en A', et l'intérieur de l'angle polyèdre SA'B'C'D', voit l'arête SB' à sa gauche. A cause de cette différence de disposition des éléments égaux, les deux angles polyèdres symétriques ne sont pas superposables : supposons, en effet, qu'on veuille les faire coïncider ; il faudra que la face ASB vienne coïncider avec la face A'SB' : or ceci peut être réalisé de deux façons seulement, savoir : 1° on place SA sur SA' et SB sur SB'; mais alors l'arête SC reste du même côté du plan ASB, et par suite ne peut venir coïncider avec SC' qui est de l'autre côté que SC de ce plan ; 2° on place SA sur SB' et SB sur SA'; la coïncidence des deux angles polyèdres est encore impossible, puisque alors le dièdre SA, par exemple, ne peut pas coïncider avec son égal le dièdre SA'.

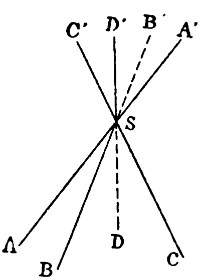


Fig. 258.

338. — Un *angle trièdre* ou simplement un *trièdre* est un angle polyèdre SABC qui n'a que trois faces et trois dièdres (*fig.* 259) ; un trièdre est nécessairement convexe.

Un trièdre n'est pas superposable à son symétrique SA'B'C'. Toutefois la superposition pourra être obtenue si le trièdre est *isocèle*, c'est-à-dire s'il a deux dièdres égaux SA et SC, par exemple. Si, en effet, on fait coïn-

cider SA avec SC′, le dièdre SA étant égal au dièdre SC, lui-même égal au dièdre SC′, la face SAB prendra la direction SC′B′ et on verra de la même façon que, SC coïncidant avec SA′, la face SCB prendra la direction SA′B′, de sorte que SB coïncidera avec SB′. La superposition est donc obtenue : mais on voit que ce ne sont pas les éléments correspondants qui sont en coïncidence. Remarquons que le raisonnement qui précède prouve l'égalité des faces ASB et C′SB′; comme les faces C′SB′ et CSB sont elles-mêmes égales, il en résulte que les faces ASB et CSB sont égales, et nous pouvons dire que *dans un trièdre isocèle les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.*

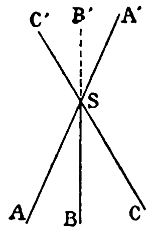


Fig. 259.

Parmi les trièdres, nous citerons le *trièdre trirectangle*, formé par trois plans perpendiculaires deux à deux, et dont le coin d'une chambre offre un exemple. Dans un tel trièdre, les trois dièdres sont des angles dièdres droits, et les trois faces sont des angles droits.

Théorème XXXV

339. — Dans un trièdre SABC, chaque face est inférieure à la somme des deux autres (*fig.* 260).

Il suffit de démontrer le théorème pour la plus grande face ASB. Menons dans l'intérieur de cette face une droite SD telle que $\widehat{ASD} = \widehat{ASC}$; il suffit de démontrer l'inégalité $\widehat{BSD} < \widehat{BSC}$.

Prenons sur SC et SD deux longueurs égales SC et SD, et par les points C et D menons un plan qui coupe les arêtes SA et SB en A et B.

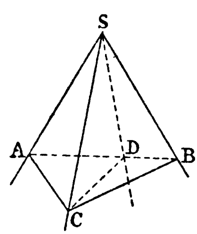


Fig. 260.

Les deux triangles SAD, SAC sont égaux comme ayant un angle égal ($\widehat{ASD} = \widehat{ASC}$) compris entre deux côtés égaux chacun à

chacun (SA commun, $SC = SD$). Par suite on a $AD = AC$, et comme dans le triangle ABC, on a $AB < AC + BC$, il en résulte en retranchant AD au premier membre et AC au second $BD < BC$. Dans les deux triangles SBD, SBC, les côtés SC et SD sont égaux et le côté SB est commun; mais le troisième côté BD du premier est inférieur au troisième côté BC du second; par conséquent l'angle BSD du premier est inférieur à l'angle BSC du second (**38**), c. q. f. d.

Théorème XXXVI

340. — Dans tout angle polyèdre convexe SABCD, la somme des faces est inférieure à quatre angles droits (*fig.* 261).

Coupons l'angle polyèdre par un plan rencontrant toutes les arêtes; la section est un polygone convexe ABCD.

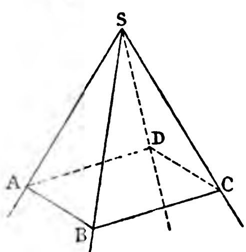


Fig. 261.

Les triangles SAB, SBC, SCD, SDA donnent :

$$A\hat{S}B = 2^{dr} - (S\hat{A}B + S\hat{B}A)$$
$$B\hat{S}C = 2^{dr} - (S\hat{B}C + S\hat{C}B)$$
$$C\hat{S}D = 2^{dr} - (S\hat{C}D + S\hat{D}C)$$
$$D\hat{S}A = 2^{dr} - (S\hat{D}A + S\hat{A}D)$$

d'où l'on tire :

$$A\hat{S}B + B\hat{S}C + C\hat{S}D + D\hat{S}A = 4 \times 2^{dr} - (S\hat{A}B + S\hat{A}D)$$
$$- (S\hat{B}A + S\hat{B}C) - (S\hat{C}B + S\hat{C}D) - (S\hat{D}C + S\hat{D}A);$$

mais, dans les trièdres A, B, C, D, on a, d'après le théorème précédent :

$$S\hat{A}B + S\hat{A}D > B\hat{A}D$$
$$S\hat{B}A + S\hat{B}C > A\hat{B}C$$
$$S\hat{C}B + S\hat{C}D > B\hat{C}D$$
$$S\hat{D}C + S\hat{D}A > C\hat{D}A,$$

et par suite il vient :

$$\widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSD} + \widehat{DSA} < 4 \times 2^{dr} - (\widehat{BAD} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA}).$$

Plus généralement, si n est le nombre des faces de l'angle polyèdre, S la somme de ses faces, et s la somme des angles du polygone de section par un plan, on a l'égalité :

$$S < n \times 2^{dr} - s.$$

Mais, nous savons que l'on a : $s = (n-2) \times 2^{dr}$ (72), et par suite il vient : $S < 4^{dr}$, c. q. f. d.

Exercices

1. — Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres.

2. — Dans un trièdre, une face est supérieure, égale ou inférieure à une autre suivant que le dièdre opposé à la première est supérieur, égal ou inférieur au dièdre opposé à la seconde; et réciproquement.

3. — Si on mène une demi-droite SO dans l'intérieur d'un trièdre SABC, la somme des angles OSB, OSC est inférieure à la somme des faces ASB, ASC.

4. — Enoncer et démontrer des théorèmes analogues à ceux des nos 37 et 38.

5. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants des trois faces d'un trièdre?

6. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants des trois arêtes d'un trièdre?

7. — Dans un trièdre, les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

8. — Dans un trièdre, les plans qui passent par les arêtes et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

9. — Dans un trièdre isocèle, le plan mené par l'arête SA perpendiculairement à la face opposée SBC (en supposant les dièdres SB et SC égaux) est bissecteur du dièdre SA et passe par la bissectrice de la face BSC.

10. On coupe un trièdre trirectangle par un plan; soit ABC la section et H la projection du sommet sur le plan : démontrer que le point H est le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

LIVRE VI

LES POLYÈDRES

§ 1er. — Le prisme.

341. — Un *polyèdre* est un corps limité de toutes parts par des plans. Les portions de plans qui limitent le polyèdre en sont les *faces;* ce sont des polygones dont les côtés et les sommets sont les *arêtes* et les *sommets* du polyèdre.

Les angles dièdres formés par deux faces contiguës sont les *angles dièdres* du polyèdre; ces dièdres ont pour arêtes les arêtes du polyèdre.

Les angles polyèdres formés par plusieurs faces qui se coupent en un sommet sont les *angles polyèdres* du polyèdre; ils ont pour sommets les sommets du polyèdre.

Les *diagonales* du polyèdre sont les droites limitées qui joignent deux sommets quelconques non situés sur une même face.

Les polyèdres de quatre, six, huit, douze et vingt faces reçoivent souvent les noms de *tétraèdre*, *hexaèdre*, *octaèdre*, *dodécaèdre* et *icosaèdre*.

Un polyèdre est *convexe* s'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan indéfiniment prolongé de chacune de ses faces. Les faces d'un tel polyèdre sont des polygones convexes, et ses angles polyèdres sont convexes.

Il est évident que la section d'un polyèdre convexe par un plan est un polygone convexe, et que par suite une

droite quelconque ne peut rencontrer la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points.

La figure 262 représente un octaèdre; ce polyèdre a huit faces, douze arêtes et douze angles dièdres, six sommets et six angles polyèdres; les huit faces sont des triangles, les six angles polyèdres ont quatre faces. Il y a trois diagonales qui sont SS′, AC et BD.

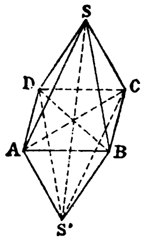


Fig. 262.

342. — Un *prisme* est un polyèdre admettant deux sortes de faces : les unes, qui sont les *faces latérales*, et dont l'ensemble constitue la *surface latérale* du prisme, sont formées par des plans parallèles à une même droite : elles sont en nombre quelconque; — les autres, qui sont les *bases*, sont au nombre de deux, et sont formées par deux plans parallèles.

La figure 263 représente un prisme ABCDE A′B′C′D′E′.

Les droites AA′, BB′, ..., EE′ sont les *arêtes latérales* du prisme; elles sont toutes parallèles, comme intersections de plans parallèles à une même droite (**303**), et toutes égales comme parallèles comprises entre plans parallèles (**312**). Il en résulte immédiatement que les faces latérales du prisme sont des parallélogrammes.

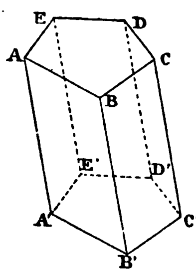


Fig. 263.

Quant aux deux bases, ce sont des polygones quelconques, mais égaux et à côtés parallèles; en effet, deux côtés correspondants tels que AB, A′B′ sont égaux et parallèles comme côtés opposés d'un parallélogramme, et deux angles correspondants tels que ABC et A′B′C′ sont égaux comme ayant les côtés respectivement parallèles et de même sens. On voit immédiatement que l'on peut construire un prisme admettant pour base un polygone donné, connaissant la direction et la longueur de ses arêtes latérales.

343. — La *hauteur* d'un prisme est la distance des deux plans des bases.

Si les arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases, le prisme est *droit;* sinon, il est *oblique.*

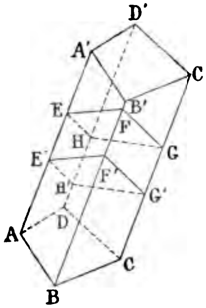


Fig. 264.

Dans un prisme droit, la hauteur est égale à chaque arête latérale, et les faces latérales sont des rectangles.

Suivant que la base d'un prisme est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc., ce prisme est dit *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal,* etc.

On appelle prisme *régulier* un prisme droit dont les bases sont des polygones réguliers.

344. — Si l'on coupe la surface latérale d'un prisme ABCDA′B′C′D′ par deux plans parallèles, on obtient ainsi un nouveau prisme EFGHE′F′G′H′ (*fig.* 264). Il en résulte immédiatement que les deux polygones de section EFGH, E′F′G′H′ sont égaux comme bases d'un prisme.

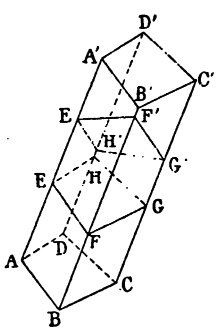


Fig. 265.

Il est évident que cette proposition subsiste si l'on coupe par deux plans parallèles la surface latérale d'un prisme prolongée indéfiniment au delà des bases.

345. — Si l'on coupe la surface latérale d'un prisme ABCDA′B′C′D′ prolongée au delà des bases s'il est nécessaire, par deux plans non parallèles, on obtient un polyèdre EFGHE′F′G′H′ que l'on appelle *prisme tronqué* ou *tronc de prisme* (*fig.* 265).

Les droites EE′, FF′, GG′, HH′ sont les *arêtes latérales* du tronc de prisme; elles sont parallèles, mais non égales.

Les polygones EFGH, E'F'G'H' sont les *bases* du tronc; ils sont inégaux.

Le tronc de prisme est *droit* si les arêtes latérales sont perpendiculaires sur l'une des bases; sinon, il est *oblique*.

Les faces latérales d'un tronc de prisme sont des trapèzes; ces trapèzes sont rectangles si le tronc de prisme est droit.

346. — On appelle *section droite* d'un prisme ou d'un tronc de prisme le polygone obtenu en coupant la surface latérale de ce polyèdre par un plan perpendiculaire aux arêtes. Quel que soit le plan sécant, le polygone ainsi obtenu ne change pas (**344**).

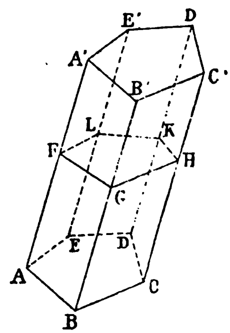


Fig. 266.

Dans un prisme droit, la section droite n'est autre que la base.

347. — Si FGHKL est la section droite d'un prisme ABCDE A'B'C'D'E' (*fig.* 266), le côté FG, par exemple, est perpendiculaire aux arêtes AA', BB' et est égal par suite à la hauteur du parallélogramme ABA'B' : l'aire de ce parallélogramme est donc $AA' \times FG$ (**239**). Continuant le même raisonnement et appelant A la longueur de l'arête latérale du prisme, on voit que la surface latérale de ce prisme a pour valeur :

$$S = A \times (FG + GH + HK + KL + LF),$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème I

L'aire latérale d'un prisme est égale au produit de son arête latérale par le périmètre de sa section droite.

Il résulte en particulier de ce théorème général que :

L'aire latérale d'un prisme droit est égale au produit de sa hauteur par le périmètre de sa base.

En ajoutant à l'aire latérale deux fois l'aire de la base, on a l'aire totale du prisme.

348. — Considérons de même un tronc de prisme ABCD A′B′C′D′ et sa section droite EFGH (*fig.* 267). Les diverses faces latérales de ce tronc sont des trapèzes dont les hauteurs sont les côtés de la section droite, et par suite on peut obtenir facilement la surface latérale du tronc ; elle sera donnée par la formule :

$$S=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{r}EF(AA'+BB')+FG(BB'+CC')+GH(CC'+DD')\\ +HE(DD'+AA')\end{array}\right]$$

d'après la règle qui donne l'aire d'un trapèze.

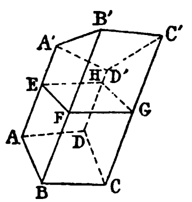


Fig. 267.

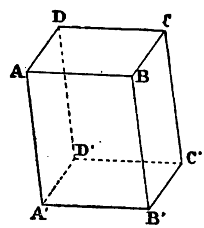


Fig. 268.

349. — Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue le *parallélépipède* qui a pour bases des parallélogrammes ABCD, A′B′C′D′ (*fig.* 268).

Un parallélépipède est un polyèdre convexe qui a six faces, huit sommets et douze arêtes. Les six faces sont des parallélogrammes, de sorte que les douze arêtes sont égales et parallèles quatre à quatre : les quatre arêtes AB, CD, A′B′, C′D′, par exemple, sont égales et parallèles.

Les plans de ces six faces sont en outre parallèles deux à deux : les plans des faces ABA′B′ et CDC′D′, par exemple, sont parallèles parce que les droites DC et DD′ sont respectivement parallèles aux droites AB et AA′ (**309**).

Il résulte immédiatement de ces remarques et de la dé-

finition du prisme que l'on peut considérer un parallélépipède comme un prisme de trois façons différentes en prenant pour bases deux faces opposées quelconques. Une conséquence immédiate de ce fait, c'est que deux faces opposées quelconques d'un parallélépipède sont égales et à côtés parallèles.

350. — Un parallélépipède peut être *droit* ou *oblique* (343).

Un parallélépipède droit est *rectangle* si ses bases sont des rectangles; toutes les faces d'un parallélépipède rectangle sont des rectangles, et tous ses angles polyèdres sont des trièdres trirectangles.

Un parallélépipède rectangle dont les faces latérales et les bases sont des carrés est un *cube*. Toutes les faces d'un cube sont des carrés égaux; toutes les arêtes d'un cube sont égales entre elles.

Les *dimensions* d'un parallélépipède rectangle sont les longueurs des trois arêtes qui aboutissent à un même sommet, ou, ce qui revient au même, les dimensions de sa base et sa hauteur. Dans un cube, les trois dimensions sont égales.

Théorème II

351. — Tout plan qui rencontre la surface latérale d'un parallélépipède, le coupe suivant un parallélogramme EFGH (*fig.* 269).

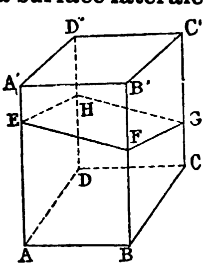


Fig. 269.

En effet, les droites EH, FG sont parallèles comme intersections du plan sécant avec les plans parallèles ADA'D', BCB'C' (304); et de même les droites EF, GH sont parallèles comme intersections du plan sécant avec les plans parallèles ABA'B', CDC'D'. La section ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme, c. q. f. d.

Exercices

1. — Dans un parallélépipède, les quatre diagonales se coupent mutuellement en parties égales.

2. — Une droite quelconque passant par le point de rencontre O des diagonales d'un parallélépipède et limitée aux points où elle rencontre les faces de ce polyèdre est divisée par ce point O en deux parties égales. (Ce point reçoit par cette raison le nom de centre du parallélépipède).

3. — Les quatre diagonales d'un parallélépipède rectangle sont égales et le carré de chacune d'elles est égal à la somme des carrés des trois dimensions du polyèdre.

4. — La diagonale d'un cube a 5 mètres de longueur; quelle est la longueur de l'arête de ce cube?

Réponse. — $2^{m},88...$

5. — Un parallélépipède rectangle a une surface totale de 45^{mq}, et deux de ses dimensions ont des longueurs de 3^{m} et 4^{m}. Quelle est la longueur de la troisième dimension?

Réponse. — $1^{m},50$.

6. — Un prisme a pour section droite un carré; le rayon du cercle circonscrit à ce carré est de 75^{cm}, et l'arête latérale du prisme est de $1^{m},50$. Quelle est la surface totale de ce prisme?

Réponse. — $8^{mq},6139...$

7. — Un tronc de prisme triangulaire a pour section droite un triangle équilatéral circonscrit à un cercle de 50^{cm} de rayon; les arêtes latérales de ce polyèdre ont des longueurs de 3^{m}, 4^{m} et 5^{m}. Quelle est sa surface latérale?

Réponse. — $20^{mq},784...$

8. — La surface latérale d'un tronc de parallélépipède est égale au périmètre de la section droite multiplié par la moyenne arithmétique des quatre arêtes, ou par la moyenne arithmétique de deux arêtes opposées.

9. — Couper un cube par un plan de façon que la section soit un hexagone régulier.

§ 2. — Le volume du prisme.

352. — Le *volume* d'un corps, en particulier d'un polyèdre, est l'étendue de l'espace occupé par ce corps.

Si deux figures dans l'espace sont égales, c'est-à-dire superposables, il est clair que leurs volumes sont égaux.

Si deux figures non égales ont des volumes égaux, on dit qu'elles sont *équivalentes*.

Pour mesurer les volumes, il faut choisir une unité. *Toutes les fois que l'unité de volume choisie ne sera pas indiquée d'une façon spéciale, il faudra entendre que l'on adopte pour cette unité le volume du cube construit sur l'unité de longueur.*

La raison de ce choix est la suivante : pour mesurer un volume, il serait peu pratique de le comparer directement à l'unité de volume ; comme le montrent les théorèmes qui suivent, on déduit la mesure du volume d'une figure de la mesure de certaines lignes de cette figure, et, en adoptant pour unité de volume le volume du cube construit sur la longueur qui a servi d'unité pour mesurer ces lignes, les énoncés des théorèmes ainsi que les calculs deviennent très simples.

353. — Avant d'arriver aux théorèmes qui conduisent à la mesure du volume du prisme, nous démontrerons trois propositions préliminaires fondamentales.

Théorème III

Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.

Si, en effet, on fait coïncider leurs bases, les arêtes latérales prendront deux à deux la même direction, puisque les prismes sont droits, et se termineront aux mêmes points, puisque les hauteurs des deux prismes sont égales. Les deux prismes coïncideront donc dans toutes leurs parties, c. q. f. d.

Théorème IV

354. — Un prisme oblique ABCD A′B′C′D′ est équivalent à un prisme droit ayant pour base sa section droite, et pour hauteur son arête latérale (*fig.* 270).

Menons les deux plans de section droite EFGH, E′F′G′H′ de telle façon que leur distance EE′ soit égale à l'arête latérale AA′ du prisme donné ; il faut prouver que le

prisme droit EFGHE'F'G'H' est équivalent au prisme donné. Ces deux prismes se composent : le premier du tronc de prisme ABCDEFGH et du tronc de prisme droit E'F'G'H'ABCD ; le second du même tronc de prisme ABCDEFGH et du tronc de prisme droit EFGHA'B'C'D' ; il suffit donc de faire voir que les deux troncs de prisme droits E'F'G'H'ABCD et EFGHA'B'C'D' sont équivalents.

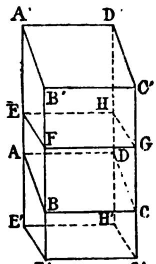


Fig. 270.

Or, ces deux troncs de prisme ont leurs bases EFGH, E'F'G'H' égales ; en outre, leurs arêtes correspondantes, E'A et EA' par exemple, sont égales : en effet, l'égalité EE' = AA' donne, en retranchant AE aux deux membres, E'A = EA'.

Il en résulte que ces deux troncs de prisme sont égaux, car, si l'on fait coïncider leurs bases, leurs arêtes latérales prendront deux à deux la même direction et se termineront aux mêmes points. Ces deux troncs de prisme étant égaux sont équivalents, c. q. f. d.

Théorème V

355. — Le plan mené par les deux arêtes latérales opposées AA', CC' d'un parallélépipède ABCDA'B'C'D' le partage en deux prismes triangulaires équivalents (*fig.* 271).

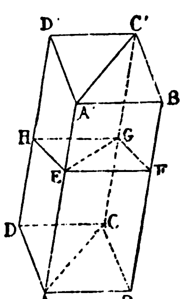


Fig. 271.

Soit EFGH la section droite du parallélépipède ; cette section droite est un parallélogramme (**351**) et est divisée en deux triangles égaux par le plan AC A'C' qui la rencontre suivant la diagonale EG. Les deux prismes ABCA'B'C' et ADCA'D'C' admettent ces deux triangles pour sections droites, et ont par suite des sections droites égales, de même qu'ils ont évidemment les arêtes

latérales égales. Or, d'après le théorème précédent, chacun de ces prismes est équivalent à un prisme droit ayant pour base sa section droite et pour hauteur son arête latérale; d'autre part (**353**), deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux; les deux prismes droits auxquels sont équivalents les deux prismes triangulaires obliques ABCA'B'C' et ADCA'D'C' sont donc égaux, et par suite ces deux prismes obliques sont équivalents, c. q. f. d.

Remarque. — Les deux prismes obliques considérés ont tous leurs éléments correspondants égaux chacun à chacun, mais non disposés dans le même ordre : aussi ne sont-ils pas égaux.

356. — Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer les théorèmes successifs qui constituent la théorie de la mesure du volume du prisme.

Théorème VI

Le nombre qui mesure le volume d'un parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' est le produit des trois nombres qui mesurent les trois dimensions AB, AD, AA' de ce parallélépipède P, à condition que ces trois dimensions soient mesurées avec une même unité de longueur et que l'on prenne pour unité de volume le cube construit sur cette unité de longueur (*fig.* 272).

Supposons, par exemple, que les trois dimensions AB, AD, AA' de P soient mesurées par les nombres $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Partageons la ligne AB en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le numérateur du nombre qui la mesure, c'est-à-dire en trois parties égales, et par les points de division tels que E, menons des plans perpendiculaires à AB.

Partageons de même les arêtes AD et AA' respectivement en deux et trois parties égales, et, par les points de division tels que F et G, menons des plans perpendicu-

laires à ces arêtes. Le parallélépipède P se trouve ainsi décomposé en parallélépipèdes p tels que AEIFGHLK ; ces parallélépipèdes rectangles sont tous égaux entre eux ; en effet, leurs dimensions parallèles à une même direction sont toutes égales d'après la construction et la propriété des parallèles comprises entre plans parallèles, de sorte que ce sont des prismes droits ayant même base et même hauteur, et par suite égaux (**353**). Quant au nombre de ces parallélépipèdes p, il est évidemment $3 \times 2 \times 3$, puisque P est décomposé en trois tranches horizontales, et que chacune d'elles contient 3×2 parallélépipèdes p (**235**).

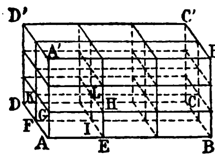


Fig. 272.

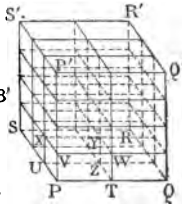


Fig. 273.

Si donc on prenait p pour unité de volume, la mesure de P serait le nombre $3 \times 2 \times 3$.

Or, les dimensions de p sont respectivement la moitié, le tiers et le quart de l'unité de longueur. Considérons alors le cube Q construit sur l'unité de longueur (*fig.* 273), PQRSP'Q'R'S'. Divisons les arêtes PQ, PS, PP' respectivement en deux, trois et quatre parties égales, et par les points de division tels que T, U, V, menons des plans perpendiculaires à ces arêtes. On décompose ainsi Q en parallélépipèdes tels que PTZUVWYX, tous égaux entre eux, et tous égaux aux parallélépipèdes p, puisque d'après la construction PT, par exemple, est la moitié de l'unité de longueur, et par suite égale à AE qui est le tiers de la longueur AB mesurée par le nombre $\frac{3}{2}$. Le nombre de ces parallélépipèdes est, d'ailleurs, comme

précédemment, $2 \times 3 \times 4$, de sorte que, si on prenait p pour unité, la mesure de Q serait le nombre $2 \times 3 \times 4$.

Le parallélépipède P contient donc $3 \times 2 \times 3$ fois le parallélépipède p contenu lui-même $2 \times 3 \times 4$ fois dans le cube Q ; si donc on prend le cube Q pour unité de volume, la mesure de P sera le quotient $\frac{3 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$, c'est-à-dire le produit de trois nombres fractionnaires $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ qui mesurent les trois dimensions de P rapportées à une même unité, c. q. f. d.

Remarque. — La démonstration précédente s'applique dans tous les cas, mais peut quelquefois se simplifier. Si, par exemple, les nombres qui mesurent les dimensions de P sont entiers, le parallélépipède p coïncide avec le cube Q ; si ces nombres ont pour numérateur commun l'unité, les parallélépipèdes p et P coïncident.

357. — En particulier, il résulte du théorème précédent qu'il y a 1000 décimètres cubes dans un mètre cube; puisque si l'on prend pour unité de longueur le décimètre, et pour unité de volume le décimètre cube, le volume du mètre cube est mesuré par

$$10 \times 10 \times 10 = 1000.$$

De même, il y a 1000 centimètres cubes dans un décimètre cube et 1000 millimètres cubes dans un centimètre cube.

358. — D'après le théorème précédent, si a, b, c sont les nombres qui mesurent les trois arêtes d'un parallélépipède rectangle, et V le nombre qui mesure son volume, on a :

$$V = a \times b \times c.$$

D'autre part (**235**), *en prenant le carré construit sur l'unité de longueur pour unité d'aire*, l'aire de la face du parallélépipède qui a pour dimensions a et b est $a \times b$; en appelant B l'aire de cette face qu'on peut choisir pour

base, et H la hauteur qui n'est autre que c, on peut donc écrire :

$$V = B \times H,$$

et énoncer le théorème suivant :

Théorème VII

Le nombre qui mesure le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur, à condition que l'on prenne pour unité de volume et pour unité d'aire le cube et le carré construits sur l'unité de longueur.

359. — Les deux théorèmes précédents sont énoncés d'habitude sous la forme incorrecte suivante que l'usage a consacrée :

Le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions ou au produit de sa base par sa hauteur.

Mais, si l'on veut être précis et si l'on veut se rendre un compte exact du sens que l'on doit attacher à ces propositions, il est tout à fait nécessaire de se reporter aux énoncés donnés en premier lieu. Les conditions de ces énoncés seront d'ailleurs conservées dans la suite implicitement, de sorte que nous pourrons nous contenter de donner des énoncés abrégés qu'il faudra comprendre comme ceux qui précèdent.

360. *Exemples.* — 1° Les trois dimensions d'un parallélépipède rectangle sont 5^{mm}, 4^{cm} et 2^{m} ; quel est son volume exprimé en litres ?

Prenant le décimètre pour unité, on a en litres :

$$V = 0{,}05 \times 0{,}4 \times 20 = 0^{l}{,}4.$$

2° Le volume d'un parallélépipède rectangle est de 576^{mc} ; deux de ses dimensions ont pour longueurs 1^{Km} et 1^{cm} ; quelle est la troisième dimension exprimée en mètres ?

La longueur en mètres de cette troisième dimension est

$$\frac{576}{1000 \times 0{,}01} = 57^{m},60.$$

361. — Les égalités précédentes :

$$V = a \times b \times c = B \times H$$

permettent d'énoncer les propositions suivantes :

Deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme les produits de leurs trois dimensions.

Deux parallélépipèdes rectangles, qui ont même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.

Remarquons encore que dans un cube on a : $a = b = c$, et par suite $V = a^3$; le volume d'un cube est donc égal au cube de son côté.

Théorème VIII

362. — Le volume d'un parallélépipède droit ABCDA′B′C′D′ a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (*fig.* 274).

La base B est le parallélogramme ABCD, la hauteur H est l'arête AA′. Considérons le parallélépipède comme un prisme de base ADA′D′ et menons sa section droite EFGH ; EH est perpendiculaire à AB et est par suite la hauteur du parallélogramme ABCD, de sorte que l'aire de ce parallélogramme est :

$$B = AB \times EH.$$

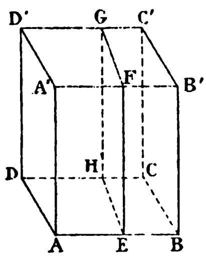


Fig. 274.

D'autre part (**354**) le parallélépipède est équivalent au prisme droit qui aurait pour base la section droite EFGH et pour hauteur l'arête AB ; mais EFGH est un rectangle, le parallélépipède donné étant droit, de sorte que le prisme droit dont nous venons de parler est un

parallélépipède rectangle. Si donc V est son volume, on a :

$$V = AB \times EH \times EF$$

d'après le théorème précédent.

D'ailleurs V est aussi le volume du parallélépipède donné ; le produit $AB \times EH$ est égal à sa base B, et EF est égale à sa hauteur AA′ ou H ; on a donc :

$$V = B \times H, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème IX

363. — Le volume d'un parallélépipède quelconque ABCDA′B′C′D′ a pour mesure le produit de sa base ABCD par sa hauteur (*fig.* 275).

Considérons le parallélépipède comme un prisme de base ADA′D′ et menons sa section droite EFGH. Le volume V du parallélépipède est le même que celui du parallélépipède droit qui a pour base EFGH et pour hauteur AB (**354**), de sorte que :

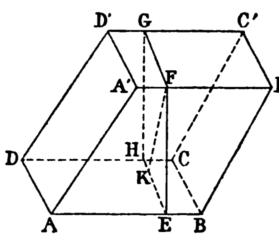


Fig. 275.

$$V = AB \times EFGH.$$

Du point F menons FK perpendiculaire sur EH ; FK sera la hauteur du parallélogramme EFGH, et l'on aura par suite :

$$EFGH = EH \times FK$$

et

$$V = AB \times EH \times FK.$$

D'ailleurs, EH est la hauteur du parallélogramme ABCD, de sorte que si B est l'aire de ce parallélogramme, on a :

$$B = AB \times EH.$$

Enfin, le plan EFGH est perpendiculaire sur le plan ABCD, puisqu'il est perpendiculaire sur AB (**329**) et la

droite FK perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans est perpendiculaire au plan ABCD (**328**), et est par suite égale à la hauteur H du parallélépipède, de sorte que l'on peut écrire finalement :

$$V = B \times H, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème X

364. — Le volume d'un prisme triangulaire quelconque ABCA'B'C' a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (*fig.* 276).

Par les points A et C menons des parallèles AD et CD à BC et AB, puis par le point D menons une droite DD' parallèle à AA' jusqu'à son point de rencontre avec le plan A'B'C' et enfin menons A'D' et C'D'. Nous formons ainsi un parallélépipède ABCDA'B'C'D' qui a même hauteur H que le prisme donné et dont la base ABCD est double de la base B de ce prisme ; le volume de ce parallélépipède est par suite $2B \times H$.

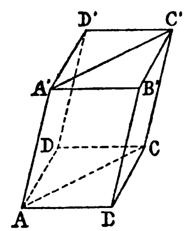


Fig. 276.

Mais ce parallélépipède est composé des deux prismes ABCA'B'C' et ADCA'D'C' qui sont équivalents (**355**). Le volume V de chacun d'eux, et en particulier du prisme donné, est donc la moitié du volume du parallélépipède, de sorte que l'on a :

$$V = B \times H, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème XI

365. — Le volume d'un prisme quelconque ABCDE A'B'C'D'E' a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (*fig.* 277).

Décomposons le prisme en prismes triangulaires ABC A'B'C', ACDA'C'D', ADEA'D'E' en menant des plans par

l'arête AA′ et toutes les autres arêtes latérales non situées dans une même face avec AA′. Le volume V du prisme donné est la somme des volumes de ces divers prismes triangulaires qui ont tous pour hauteur la hauteur H du prisme. On a donc :

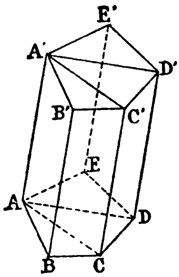


Fig. 277.

$$V = ABC \times H + ACD \times H + ADE \times H$$
$$= (ABC + ACD + ADE) \times H.$$

Mais la somme des bases partielles ABC, ACD, ADE est égale à la base B du prisme donné ; on a donc :

$$V = B \times H, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — Il résulte de cette formule :

1° Que deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases ;

2° Que deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

366. Corollaire. — En se reportant au théorème du n° **354,** on voit encore que *le volume d'un prisme a pour mesure le produit de sa section droite par son arête latérale.*

Exercices

1. — Un cube contient 100 000 litres ; quel est son côté?

Réponse. — $4^m,64...$

2. — La base d'un parallélépipède est un losange dont les diagonales ont des longueurs de 6^m et 8^m ; la hauteur est égale au côté de ce losange. Quel est le volume de ce polyèdre?

Réponse. — 120^{mc}.

3. — La base d'un prisme est un hexagone régulier de 50^{cm} de côté ; sa hauteur est $4^m,50$. Quel est son volume?

Réponse. — $2^{mc},922...$

4. — La base d'un prisme oblique est un triangle équilatéral de 1^m de côté ; son arête latérale est de 2^m et sa hauteur de $1^m,5$; quelle est l'aire de sa section droite?

Réponse. — $0^{mq},3247...$

5. — Quel est le poids d'une barre de fer de $2^m,5$ de lon-

gueur et de 4^{cmq} de section, sachant que le poids spécifique du fer est 7,79?

Réponse. — 7^{Kg},790.

6. — Les arêtes d'un parallélépipède rectangle en bois sont proportionnelles aux nombres 2, 3, 4; calculer leurs longueurs, sachant que le parallélépipède pèse 4^{Kg},586 et que le poids spécifique du bois est 0,75?

Réponse. — 126^{mm}, 378^{mm}, 252^{mm}.

7. — Le volume d'un prisme triangulaire est égal au produit de l'aire d'une de ses faces latérales par la perpendiculaire abaissée sur cette face d'un point de l'arête opposée.

8. — Si sur trois droites parallèles non situées dans un même plan on prend d'une façon quelconque trois droites égales à une longueur donnée, le prisme triangulaire qui a ces trois droites pour arêtes latérales a un volume constant.

§ 3. — **La pyramide.**

367. — Une *pyramide* est un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque ABCDE et dont les autres faces sont des triangles obtenus en joignant les sommets de la première face à un point quelconque S de l'espace (*fig.* 278).

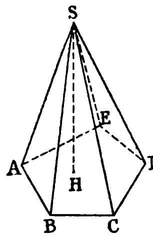


Fig. 278.

La première face ABCDE est la *base* de la pyramide; les autres en sont les *faces latérales*, et leur ensemble constitue la *surface latérale* de la pyramide. Le point S est le *sommet* de la pyramide.

Les angles polyèdres de la pyramide sont tous des trièdres, sauf celui qui a son sommet en S.

Les droites SA, SB..., SE sont les *arêtes latérales* de la pyramide.

La *hauteur* de la pyramide est la distance SH du sommet à la base.

Suivant que la base d'une pyramide est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc., la pyramide est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, etc.

Une pyramide est *régulière* si la base est un polygone régulier et si le pied de sa hauteur coïncide avec le centre de ce polygone régulier.

Toutes les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont égales comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

Les faces latérales d'une pyramide régulière sont par suite des triangles isocèles égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

La hauteur commune de ces triangles est l'*apothème* de la pyramide régulière.

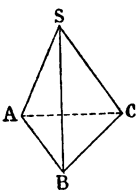


Fig. 279.

La pyramide triangulaire reçoit aussi le nom de *tétraèdre*.

Un tétraèdre SABC (*fig.* 279) a quatre faces triangulaires, quatre sommets, quatre angles trièdres et six arêtes opposées deux à deux.

On voit que l'on peut considérer un tétraèdre comme une pyramide triangulaire de quatre façons différentes, chacun des sommets du tétraèdre pouvant être pris comme sommet de la pyramide.

Si, dans une question donnée, il convient de mettre en évidence la base et le sommet d'un tétraèdre, il vaut mieux l'appeler pyramide triangulaire; si, au contraire, les quatre faces et les quatre sommets ne jouent pas un rôle distinct, il vaut mieux garder le nom de tétraèdre.

Un tétraèdre est *régulier* si ses faces sont toutes des triangles équilatéraux égaux. On voit qu'une pyramide triangulaire régulière n'est pas nécessairement un tétraèdre régulier; dans une pyramide triangulaire régulière, la base seule est un triangle équilatéral et les trois autres faces sont des triangles isocèles égaux.

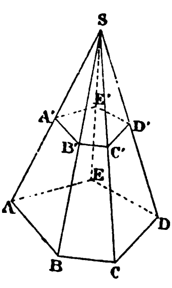


Fig. 280.

368. — Si l'on coupe une pyramide SABCDE (*fig.* 280) par un plan qui rencontre toutes ses arêtes latérales, on obtient un nouveau polyèdre ABCDEA'B'C'D'E', que l'on appelle *pyramide tronquée* ou *tronc de pyramide*

Si le plan sécant est parallèle au plan de base de la pyramide, le tronc de pyramide est dit *à bases parallèles*. Nous ne considérerons que de tels troncs de pyramide, et par suite, pour abréger le langage, nous supprimerons l'indication : à bases parallèles, qui devra être sous-entendue.

Les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' sont les *bases* du tronc; les droites AA', BB',... EE' en sont les *arêtes latérales;* les *faces latérales* sont les polygones ABA'B', BCB'C',... qui sont évidemment des trapèzes, les droites telles que AB, A'B' étant parallèles comme intersections d'un même plan par deux plans parallèles. L'ensemble des faces latérales constitue la *surface latérale* du tronc. La *hauteur* du tronc est la distance des deux bases.

Le tronc de pyramide est *régulier*. si la pyramide à laquelle il appartient est régulière.

THÉORÈME XII

369. — Si une pyramide SABCDE est coupée par un plan parallèle à sa base :

1° Ses arêtes latérales et sa hauteur SH sont divisées en segments proportionnels;

2° La section A'B'C'D'E' est un polygone semblable à la base de la pyramide;

3° Le rapport des aires de la section A'B'C'D'E' et de la base ABCDE est égal au rapport des carrés de leurs distances SH' et SH au sommet de la pyramide (*fig.* 281).

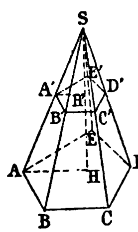


Fig. 281.

1° Les droites AB, A'B' sont parallèles; il en est de même des droites AH et A'H', BC et B'C', etc. Les triangles SAH et SA'H', SAB et SA'B', SBC et SB'C' etc., sont, par suite, semblables deux à deux et donnent :

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{SA'}{SA}, \quad \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB}, \quad \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}, \ldots;$$

d'où l'on tire la suite de rapports égaux :

$$\frac{SH'}{SH}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{SD'}{SD}=\frac{SE'}{SE}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

2° Les angles correspondants des deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' sont égaux comme ayant les côtés parallèles et de même sens. En outre, les triangles semblables considérés plus haut donnent :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}, \quad \frac{B'C'}{BC}=\frac{SB'}{SB},\ldots;$$

les seconds membres de ces égalités étant tous égaux en vertu de ce qui précède, il en est de même des premiers, et l'on a :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA},$$

c'est-à-dire que les côtés correspondants des deux polygones considérés sont proportionnels.

Ces deux polygones ayant leurs angles égaux et les côtés proportionnels sont semblables, c. q. f. d.

3° Le rapport de similitude des deux polygones A'B'C'D'E' et ABCDE est égal au rapport $\frac{A'B'}{AB}$ de deux côtés homologues. Mais les égalités écrites plus haut donnent :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SH'}{SH},$$

de sorte que ce rapport de similitude est encore $\frac{SH'}{SH}$.

Le rapport des aires de deux polygones semblables étant égal au carré de leur rapport de similitude (**256**), on a donc :

$$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE}=\frac{\overline{SH'}^2}{\overline{SH}^2}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

370. — Si la pyramide ABCDE est régulière, le poly-

gone ABCDE est régulier, et il en est de même, d'après le théorème précédent, du polygone A'B'C'D'E'; en outre, H est le centre du premier polygone, et il en résulte immédiatement que H' est le centre du second; par suite, la pyramide SA'B'C'D'E' est aussi régulière.

On déduira de là que, dans un tronc de pyramide régulier, les bases sont deux polygones réguliers semblables, et que les faces latérales sont des trapèzes isocèles égaux; en outre, la droite qui joint les centres des deux bases est perpendiculaire sur leur plan. Ajoutons que la hauteur commune des diverses faces latérales s'appelle l'*apothème* du tronc de pyramide régulier.

Théorème XIII

371. — Si deux pyramides SABCD, TEFG ont des hauteurs SH, TK égales, les sections A'B'C'D', E'F'G' faites dans ces pyramides par des plans menés parallèlement à leurs bases et à des distances SH', TK' des sommets égales entre elles, sont proportionnelles aux bases des deux pyramides (*fig.* 282).

D'après le théorème précédent, on a :

$$\frac{A'B'C'D'}{ABCD}=\frac{\overline{SH'}^2}{\overline{SH}^2},\ \frac{E'F'G'}{EFG}=\frac{\overline{TK'}^2}{\overline{TK}^2}.$$

Or par hypothèse

$SH = TK$ et $SH' = TK'$.

On a donc :

$$\frac{A'B'C'D'}{ABCD}=\frac{E'F'G'}{EFG},\ \text{c. q. f. d.}$$

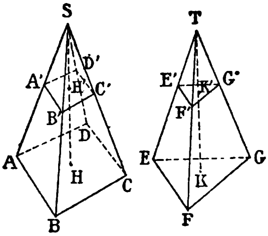


Fig. 282.

372. Corollaire. — *Si deux pyramides de même hauteur ont des bases équivalentes, les sections faites dans ces pyramides par des plans menés parallèlement à leurs bases à la même distance des sommets sont équivalentes.*

373. — L'aire latérale d'une pyramide peut s'obtenir facilement en faisant la somme des aires des faces latérales ; si a, a', a''... sont les côtés successifs de la base, et h, h', h''... les hauteurs des faces latérales correspondantes, on aura pour la mesure de l'aire latérale S :

$$S = \frac{1}{2}[ah + a'h' + a''h'' + \ldots]$$

Si la pyramide est régulière, les hauteurs h, h', h''... sont toutes égales à l'apothème h de la pyramide, et l'on a :

$$S = \frac{h}{2}(a + a' + a'' + \ldots)$$

c'est-à-dire que :

L'aire latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothème.

374. — On obtiendra de la même façon l'aire latérale S d'un tronc de pyramide. Soient a, a', a''... les côtés successifs de l'une des bases ; b, b', b''... les côtés correspondants de l'autre base ; h, h', h''... les hauteurs des faces latérales correspondantes ; on a :

$$S = \frac{1}{2}[h(a + b) + h'(a' + b') + h''(a'' + b'') + \ldots].$$

Si le tronc est régulier, les hauteurs h, h', h''... sont toutes égales à l'apothème h du tronc, et l'on a :

$$S = \frac{h}{2}(a + a' + a'' + \ldots + b + b' + b'' + \ldots],$$

c'est-à-dire que :

L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulier a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses deux bases par son apothème.

Exercices

1. — Quelle est la hauteur h et l'aire totale s d'un tétraèdre régulier de côté a?

Réponse. — $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $s = a^2\sqrt{3}$.

2. — On coupe un tétraèdre régulier de côté a par un plan mené parallèlement à l'une des faces à la distance b du sommet. Quelle est l'aire latérale S et l'aire totale S′ du tronc de pyramide ainsi formé?

Réponse. — $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(a^2 - \frac{3}{2}b^2\right)$; $S' = \frac{\sqrt{3}}{4}(4a^2 - 3b^2)$.

3. — Une pyramide régulière a pour base un hexagone régulier de côté a et une hauteur h; on la coupe par un plan parallèle à la base de façon à obtenir un tronc de pyramide de hauteur k. Quelle sera l'aire totale de ce tronc?

Rép. — $3a\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}\ \frac{k(2h-k)}{h^2} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\ \frac{h^2 + (h-k)^2}{h^2}$.

4. — Les plans menés perpendiculairement aux arêtes d'un tétraèdre par leurs milieux se coupent en un même point.

5. — Les perpendiculaires élevées sur chaque face d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à cette face se rencontrent en un même point.

6. — Trouver un point équidistant des quatre sommets d'un tétraèdre.

7. — Trouver les points équidistants des quatre faces d'un tétraèdre.

8. — Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points d'intersection des médianes des faces opposées se rencontrent en un même point, situé au quart de chacune d'elles à partir de la face correspondante.

9. — Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se rencontrent en un même point situé au milieu de chacune d'elles.

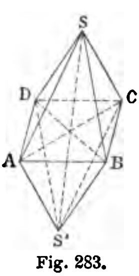


Fig. 283.

10. — Sur un carré ABCD comme base et de part et d'autre de ce carré on construit deux pyramides régulières SABCD, S′ABCD dont les faces latérales soient des triangles équilatéraux (*fig.* 283). On obtient ainsi

un polyèdre appelé *octaèdre régulier* dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux de côté a. Evaluer l'aire totale et les diagonales de ce polyèdre.

Réponse. — L'aire totale est $2a^2\sqrt{3}$; les trois diagonales sont égales à $a\sqrt{2}$.

11. — On coupe un octaèdre régulier de côté a par deux plans parallèles au plan ABCD et situés de part et d'autre de ce plan à la même distance h. Quelle sera l'aire totale du nouveau polyèdre ainsi obtenu? Application : $a = 1^{m}$, $h = 0^{m},25$.

Réponse. — $4\sqrt{3}\, h(a\sqrt{2} - h) + 2(a - h\sqrt{2})^2$ et dans le cas particulier donné : $2^{mq},8524...$

12. — Les centres des faces d'un octaèdre régulier de côté a sont les sommets d'un cube. Quelle est l'arête de ce cube?

Réponse. — $\frac{a}{3}\sqrt{2}$.

13. — Les centres des faces d'un cube sont les sommets d'un octaèdre régulier. En appelant a l'arête du cube, quelle est l'arête de cet octaèdre?

Réponse. — $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

14. — Les centres des faces d'un tétraèdre régulier de côté a sont les sommets d'un nouveau tétraèdre régulier dont on demande le côté.

Réponse. — $\frac{a}{3}$.

15. — Calculer les dièdres d'un tétraèdre régulier ABCD. (Si M est le milieu de CD, le triangle AMB a pour angle en M l'angle plan du dièdre CD et donne $\cos M = \frac{1}{3}$ et par suite $M = 70°32'$.)

16. — Calculer les dièdres d'un octaèdre régulier. (En opérant comme dans l'exercice précédent et appelant M l'angle cherché, on trouve $\cos M = -\frac{1}{3}$ et par suite $M = 109°28'$.)

§ 4. — Le volume de la pyramide.

Théorème XIV

375. — Deux pyramides triangulaires SABC, S′A′B C qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalentes (*fig.* 284 et 285).

Divisons les hauteurs des deux pyramides en un même nombre de parties égales, quatre, par exemple, et, par les

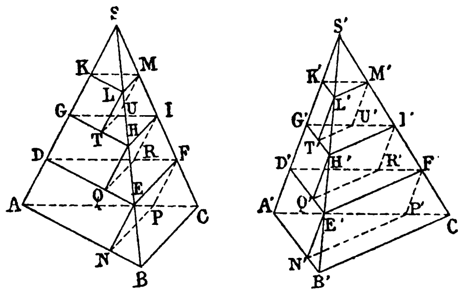


Fig. 284.

points de division, menons des plans parallèles aux bases respectives. Nous déterminons ainsi dans les deux pyramides des sections DEF, GHI, KLM d'une part, D′E′F′, G′H′I′, K′L′M′ d'autre part.

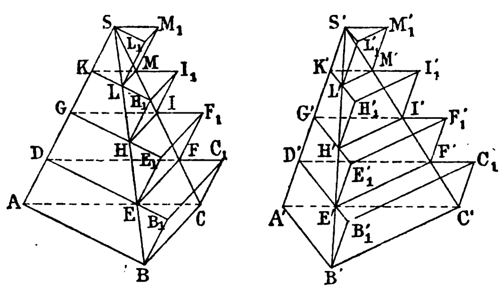


Fig. 285.

D'après le théorème du n° **369**, les segments ainsi déterminés sur chacune des arêtes des deux pyramides sont égaux, et, d'après le corollaire du n° **372**, les sections correspondantes faites dans les deux pyramides sont équivalentes.

Construisons des prismes DEFANP, GHIDQR, KLMGTU d'une part, et D'E'F'A'N'P', G'H'I'D'Q'R', K'L'M'G'T'U' d'autre part, ayant pour bases les sections faites par les plans sécants dans chaque pyramide et ayant tous pour hauteur le quart de la hauteur commune des deux pyramides, puisque cette hauteur a été divisée en quatre parties égales. Les prismes correspondants de ces deux séries sont équivalents comme ayant même hauteur et des bases équivalentes d'après ce qui précède, de sorte que la somme des prismes inscrits dans la première pyramide est équivalente à la somme des prismes inscrits dans la seconde. Appelant s cette somme, V et V' les volumes des deux pyramides, on a d'ailleurs manifestement

$$s < V \text{ et } s < V'.$$

Circonscrivons de même aux deux pyramides les prismes représentés sur la figure 285, qui ont même hauteur que les précédents et dont les bases sont les triangles ABC, DEF, GHI, KLM d'une part, et A'B'C', D'E'F', G'H'I', K'L'M' d'autre part. Comme plus haut, les prismes correspondants de ces deux séries sont équivalents, de sorte que la somme des premiers est équivalente à la somme des seconds. Appelant S cette somme, on a d'ailleurs :

$$S > V \text{ et } S > V'.$$

Considérons maintenant la différence $S - s$; les prismes KLMGTU et $KLMSL_1M_1$ sont égaux d'après la construction; il en est de même des prismes GHIDQR et $GHIKH_1I_1$, et aussi des prismes DEFANP et $DEFGE_1F_1$. La différence $S - s$ se réduit donc au prisme $ABCDB_1C_1$ dont le volume est facile à évaluer. Si B désigne l'aire de

la base ABC et si H est la hauteur commune des deux pyramides, on a :

$$S - s = B \times \frac{H}{4},$$

et plus généralement, si on divise la hauteur des pyramides en n parties égales, on aura :

$$S - s = B \times \frac{H}{n}.$$

Imaginons maintenant que l'on double indéfiniment le nombre n des divisions de la hauteur; la quantité s ira constamment en augmentant (une figure rend ce fait évident), en restant toujours inférieure à V et V′ et de même la quantité S ira constamment en diminuant, en restant toujours supérieure à V et V′. D'ailleurs, la différence $S - s$ aura pour limite zéro d'après sa valeur écrite plus haut. On conclut de là que les quantités s et S ont une même limite, et que les quantités V et V′ sont nécessairement égales à cette limite et par suite égales entre elles, c. q. f. d.

Théorème XV

376. — Le volume d'une pyramide triangulaire SABC a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur (*fig.* 286).

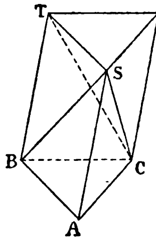


Fig. 286.

Par les points B et C menons des parallèles BT et CU à l'arête SA limitées au plan parallèle à la base mené par le sommet S et joignons ST, SU, UT : nous formons ainsi un prisme ABCSTU qui a même base B et même hauteur H que la pyramide donnée, de sorte que son volume est $B \times H$.

Les plans SBC et SCT décomposent ce prisme en trois pyramides triangulaires SABC, SCTU, SBCT. La première

est la pyramide donnée; la seconde lui est équivalente, d'après le théorème précédent, car on peut lui donner pour sommet C et pour base STU, et alors elle a même base et même hauteur que la première. Enfin la troisième est équivalente à la seconde, et par suite à la première : car les deux pyramides SCTU et SBCT de même sommet S ont même hauteur (la distance du point S au plan BCTU) et des bases égales comme moitiés d'un même parallélogramme. Le prisme est donc décomposable en trois pyramides équivalentes à la pyramide donnée; le volume de celle-ci est donc le tiers du volume du prisme, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ BH, c. q. f. d.

Théorème XVI

377. — Le volume d'une pyramide quelconque SABCDE a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur (*fig.* 287).

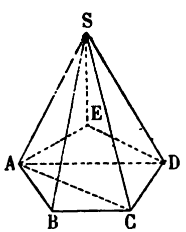


Fig. 287.

Décomposons la pyramide en pyramides triangulaires SABC, SACD, SADE en menant des plans par l'arête SA et toutes les autres arêtes latérales non situées dans une même face avec SA. Le volume V de la pyramide donnée est la somme des volumes de ces diverses pyramides triangulaires qui ont toutes pour hauteur la hauteur H de la pyramide donnée. On a donc :

$$V = \frac{1}{3}\,ABC \times H + \frac{1}{3}\,ACD \times H + \frac{1}{3}\,ADE \times H$$

$$= \frac{1}{3}\,(ABC + ACD + ADE) \times H.$$

Mais la somme des bases partielles ABC, ACD, ADE est égale à la base B de la pyramide donnée; on a donc :

$V = \frac{1}{3}\,B \times H$, c. q. f. d.

Remarque. — Il résulte de cette formule que :

1° Une pyramide quelconque est équivalente au tiers du prisme de même base et de même hauteur.

2° Deux pyramides quelconques de même base et de même hauteur sont équivalentes.

3° Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

4° Deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs.

378. — Pour évaluer le volume d'un polyèdre quelconque, on pourra le décomposer en pyramides et évaluer les volumes de ces pyramides : les théorèmes qui suivent nous montreront une application de ce procédé.

En particulier, s'il existe un point O intérieur au polyèdre et équidistant de toutes ses faces, on voit immédiatement que le volume de ce polyèdre sera égal au tiers du produit de son aire totale par la distance du point O à chacune des faces. Il suffit de décomposer le polyèdre en pyramides ayant pour sommet commun le point O et pour bases les diverses faces du polyèdre. Si le point O équidistant de toutes les faces était extérieur au polyèdre, il serait facile de modifier cet énoncé.

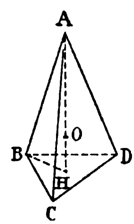


Fig. 288.

Application. — Considérons un tétraèdre régulier ABCD de côté a (*fig.* 288). Soit h sa hauteur AH; dans le triangle rectangle ABH, on a $h^2 = a^2 - \overline{BH}^2$; mais BH est le rayon du cercle circonscrit à la base, de sorte que

$$BH = \frac{a}{\sqrt{3}}, \text{ et par suite } h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} \text{ et } h = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

La surface de la base est $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, et par suite le volume du tétraèdre est

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

On démontre aisément que le point O situé sur AH au

quart de cette longueur est équidistant des quatre faces; en appelant S l'aire totale du tétraèdre, on a donc encore :

$$V = \frac{1}{3} S \times OH.$$

Mais $S = a^2\sqrt{3}$ et $OH = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$, de sorte que l'on trouve comme plus haut :

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Théorème XVII

379. — Le volume d'un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles ABCA'B'C' est la somme des volumes de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases (*fig.* 289).

Les plans AB'C et A'B'C décomposent le tronc en trois pyramides triangulaires, B'ABC, CA'B'C' et AA'B'C. La première et la seconde ont pour bases respectives les deux bases ABC et A'B'C' du tronc et ont même hauteur que le tronc : ce sont les deux premières pyramides de l'énoncé. Considérons la troisième AA'B'C et donnons-lui pour sommet le point B'; par le point B' menons une parallèle à AA' qui rencontre AB au point D et considérons la pyramide DAA'C : elle a même base AA'C que la première et elle a aussi même hauteur, car les deux points B' et D sont sur une parallèle à AA' et par suite au plan de base AA'C, de sorte que leurs distances à ce plan sont égales. La pyramide AA'B'C est donc équivalente à la pyramide A'ACD. Donnons à celle-ci pour sommet A'; sa hauteur sera la hauteur du tronc, et, pour démontrer le

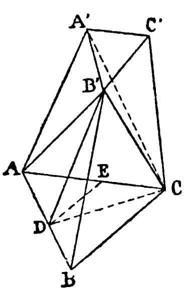


Fig. 289.

théorème, il nous suffit de faire voir que sa base ACD est moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.

Par le point D menons une parallèle DE à BC; il est clair que le triangle ADE est égal au triangle A'B'C' comme ayant les côtés parallèles, et par suite les angles égaux, et en outre les côtés AD et A'B' égaux comme parallèles comprises entre parallèles, et tout est ramené par conséquent à démontrer la proportion

$$\frac{ABC}{ACD} = \frac{ACD}{ADE}.$$

Les triangles ABC et ACD ont même hauteur si on leur donne le point C pour sommet; par suite ils sont entre eux comme leurs bases (**242**), et l'on a :

$$\frac{ABC}{ACD} = \frac{AB}{AD}.$$

Les triangles ACD et ADE ont même hauteur si on leur donne le point D pour sommet; par suite ils sont entre eux comme leurs bases, et l'on a :

$$\frac{ACD}{ADE} = \frac{AC}{AE}.$$

Mais DE étant parallèle à BC, les seconds membres des deux égalités précédentes sont égaux (**153**), et par suite il en est de même des premiers, c. q. f. d.

Théorème XVIII

380. — Le volume d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles ABCDEA'B'C'D'E' est la somme des volumes de trois pyramides ayant pour hauteur commune du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases (*fig.* 290).

Soit SABCDE la pyramide à laquelle appartient le tronc considéré. Construisons une pyramide *triangulaire*

TPQR ayant même hauteur que la précédente, et dont la base PQR soit équivalente à la base ABCDE de la précédente, et coupons cette pyramide par un plan P′Q′R′ dont la distance au sommet T soit égale à la distance du plan A′B′C′D′E′ au sommet S.

Les deux sections A′B′C′D′E′ et P′Q′R′ seront aussi équivalentes (**372**), de sorte que les deux troncs de pyramide ABCDEA′B′C′D′E′, PQRP′Q′R′, auront même hauteur et des bases respectivement équivalentes. Les pyramides SABCDE et TPQR sont équivalentes (**377**) ; il en est

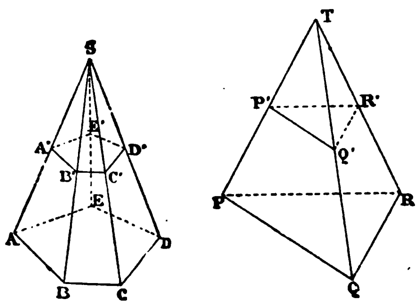


Fig. 290.

de même des pyramides SA′B′C′D′E′ et TP′Q′R′ ; il en résulte que les deux troncs de pyramide considérés plus haut sont équivalents.

Cela étant, le volume du tronc de pyramide triangulaire est, d'après le théorème précédent, la somme des volumes de trois pyramides ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases ; il en est donc de même du volume du tronc de pyramide donné qui est équivalent au tronc de pyramide triangulaire, qui a même hauteur que ce dernier, et dont les bases sont respectivement équivalentes aux bases de ce dernier, c. q. f. d.

381. — En appelant V le volume d'un tronc de pyra-

mide, H sa hauteur, B et B′ ses bases, on a donc, d'une façon générale :

$$V = \frac{H}{3}(B + B' + \sqrt{BB'}).$$

Les deux bases sont d'ailleurs des polygones semblables ; si r est leur rapport de similitude, on a $\frac{B'}{B} = r^2$, et par suite $BB' = B^2r^2$; il vient donc finalement :

$$V = \frac{BH}{3}(1 + r + r^2).$$

Théorème XIX

382. — Le volume d'un tronc de prisme triangulaire ABCA′B′C′ est égal à la somme des volumes de trois pyramides ayant pour base commune l'une des bases du tronc ABC, et pour sommets les sommets de l'autre base A′B′C′ (*fig.* 291).

Les plans AB′C et A′B′C décomposent le tronc en trois pyramides triangulaires B′ABC, ACA′B′ et CA′B′C′.

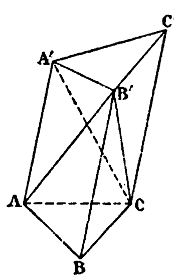


Fig. 291.

La première a pour base ABC et pour sommet B′ ; c'est l'une de celles de l'énoncé.

La seconde a pour sommet B′ et pour base ACA′ ; elle est par suite équivalente à la pyramide qui aurait même base ACA′ et pour sommet B, puisque B et B′ sont sur une parallèle BB′ au plan de base ACA′, et que par suite les distances de ces points au plan ACA′ sont égales.

Cette nouvelle pyramide peut recevoir comme sommet le point A′, et pour base le triangle ABC; c'est donc encore une des pyramides de l'énoncé.

Enfin la troisième pyramide CA′B′C′ a pour sommet A′ et pour base CB′C′ ; elle peut être remplacée par la pyramide équivalente de sommet A et de même base CB′C′,

puisque, comme plus haut, la droite AA′ est parallèle au plan CB′C′. Cette nouvelle pyramide peut recevoir comme sommet le point B′ et pour base le triangle ACC′, et peut être remplacée par suite par la pyramide équivalente de sommet B et de même base ACC′, puisque, comme plus haut, la droite BB′ est parallèle au plan ACC′. Mais cette dernière pyramide peut recevoir pour base le triangle ABC et pour sommet le point C′ ; c'est donc la troisième pyramide de l'énoncé, et le théorème se trouve complètement démontré.

Théorème XX

383. — Le volume d'un tronc de prisme triangulaire ABCA′B′C′ est égal au tiers du produit de sa section droite par la somme de ses arêtes latérales (*fig.* 292).

Menons en effet une section droite DEF qui décompose le tronc de prisme donné en deux autres ABCDEF et A′B′C′DEF, et appliquons à chacun de ces troncs le théorème précédent. Le volume du premier sera :

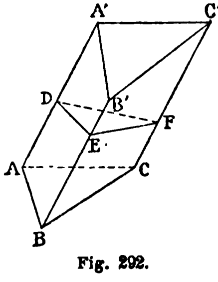


Fig. 292.

$$\frac{1}{3}\text{DEF}(\text{AD}+\text{BE}+\text{CF}),$$

puisque AD, BE, CF sont précisément ici les hauteurs des pyramides qui ont pour base DEF et pour sommets A, B, C.

De même, le volume du second sera :

$$\frac{1}{3}\text{DEF}(\text{A'D}+\text{B'E}+\text{C'F}).$$

Par suite, le volume V du tronc de prisme donné sera, en ajoutant :

$$\text{V}=\frac{1}{3}\text{DEF}(\text{AA'}+\text{BB'}+\text{CC'}), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — On verra aisément que la proposition subsiste si la section droite DEF rencontrait une ou plusieurs arêtes latérales du tronc sur leurs prolongements.

384. — Pour évaluer le volume d'un tronc de prisme quelconque, on le décomposera en troncs de prisme triangulaire, et l'on appliquera l'une ou l'autre des deux propositions précédentes.

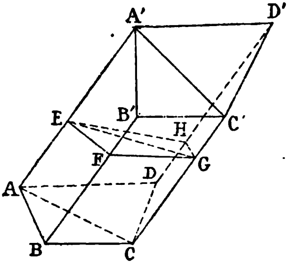


Fig. 293.

Considérons, par exemple, un tronc de prisme quadrangulaire ABCDA'B'C'D' (*fig.* 293) et soit EFGH sa section droite. Appliquant la formule du théorème précédent à chacun des troncs de prisme triangulaire ABCA'B'C', ACDA'C'D', on obtient pour le volume cherché :

$$V = \frac{1}{3} EFG(AA' + BB' + CC') + \frac{1}{3} EGH(CC' + DD' + AA').$$

Si le tronc est un tronc de parallélépipède (*fig.* 294), chacun des triangles EFG, EGH est équivalent à la moitié du parallélogramme EFGH, et l'on peut écrire :

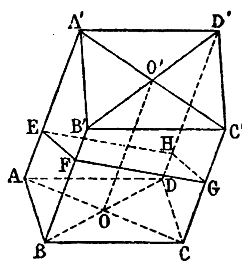


Fig. 294.

$$V = \frac{1}{6} EFGH(2AA' + BB' + 2CC' + DD').$$

Considérons les trapèzes ACA'C' et BDB'D'; les droites AC et BD se coupent en leur milieu O comme diagonales d'un parallélogramme; et de même les droites A'C' et B'D' se coupent en leur milieu O'. On a donc :

$$AA' + CC' = 2OO' \text{ et } BB' + DD' = 2OO',$$

puisque dans un trapèze la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles est égale à la demi-somme des bases.

Portant ces valeurs dans l'expression de V précédemment trouvée, il vient :

$$V = EFGH \times OO',$$

c'est-à-dire que

Le volume d'un tronc de parallélépipède est égal au produit de la section droite par la droite qui joint les centres des deux bases, ou par la moyenne arithmétique de deux arêtes opposées, ou encore par la moyenne arithmétique des quatre arêtes.

385. — Les tas de pierre que l'on dispose sur les routes, et les tombereaux ont la forme d'un tronc de prisme quadrangulaire : ils sont terminés en haut et en bas par deux rectangles ABCD, A'B'C'D' dont les côtés sont parallèles, et dont les centres sont sur une même verticale, de sorte que les autres faces sont des trapèzes isocèles (*fig.* 295).

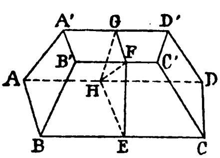


Fig. 295.

Evaluons le volume V d'un tel polyèdre, connaissant les dimensions $AB = a$, $BC = b$, $A'B' = a'$, $B'C' = b'$ des deux faces inférieure et supérieure et la distance h de ces deux faces.

Considérons ce corps comme un tronc de prisme quadrangulaire aux arêtes latérales AD, BC, A'D', B'C'. Soit EFGH une section droite ; on a (**384**) :

$$V = \frac{1}{3} EFH(AD + BC + B'C') + \frac{1}{3} FGH(AD + B'C' + A'D').$$

D'ailleurs on a :

$$EFH = \frac{1}{2} h \times HE \text{ et } FGH = \frac{1}{2} h \times FG;$$

introduisant les notations indiquées plus haut, il vient :

$$V = \frac{1}{6} ah(2b + b') + \frac{1}{6} a'h(2b' + b),$$

$$= \frac{h}{6}(2ab + 2a'b' + ab' + a'b).$$

$$= \frac{h}{6}[(ab + a'b') + (a + a')(b + b')].$$

Ces diverses formes de l'expression de V pourront être utilisées suivant les cas.

Si l'on fait $a' = o$, la figure devient un comble qui a la forme d'un tronc de prisme triangulaire dont le volume est donné par la formule :

$$V = \frac{ah}{6}(2b + b').$$

Exercices

1. — Quel est le volume de l'octaèdre régulier de côté a?

Réponse. — $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

2. — Trouver le volume V d'un tronc de pyramide de bases B et B′ et de hauteur H en le considérant comme la différence de deux pyramides. [Si h et h' sont les hauteurs de ces deux pyramides, on a : $V = \frac{1}{3}(Bh - B'h')$, et en outre $h - h' = H$ et $\frac{B}{B'} = \frac{h^2}{h'^2}$; éliminant h et h', on trouve :

$$V = \frac{H}{3}\left(\frac{\sqrt{B^3} - \sqrt{B'^3}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}\right) = \frac{H}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})].$$

3. — On considère un polyèdre formé en coupant la surface latérale d'une pyramide prolongée au delà de son sommet par un plan parallèle à la base. Evaluer le volume V de ce polyèdre appelé tronc de pyramide de seconde espèce, connaissant ses bases B et B′ et sa hauteur H. [Ce polyèdre est la somme de

deux pyramides de hauteurs h et h', de sorte que l'on a : $V = \frac{1}{3}(Bh + B'h')$, et en outre $h + h' = H$ et $\frac{B}{B'} = \frac{h^2}{h'^2}$; on en tire, comme dans l'exercice précédent :

$$V = \frac{H}{3}\left(\frac{\sqrt{B^3} + \sqrt{B'^3}}{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}\right) = \frac{H}{3}(B + B' - \sqrt{BB'})].$$

4. — On coupe un tétraèdre régulier de côté a par un plan mené parallèlement à la base à la distance b du sommet. Quel est le volume du tronc ainsi formé?

Réponse. — $\frac{1}{12}(a\sqrt{2} - b\sqrt{3})\left(a^2 + \frac{3}{2}b^2 + ab\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

5. — Une pyramide régulière a pour base un hexagone régulier de côté a et une hauteur h; on la coupe par un plan parallèle à la base de façon à obtenir un tronc de pyramide de hauteur k. Quel sera le volume de ce tronc?

Réponse. — $\frac{a^2k\sqrt{3}}{2h^2}(3h^2 - 3hk + k^2)$.

6. — Appliquer le résultat précédent en supposant $a = 4^m$, $k = 5^m$ et $\frac{k}{h} = \frac{1}{3}$.

Réponse. — $146^{mc},258$.

7. — On coupe un octaèdre régulier de côté a par deux plans parallèles au plan ABCD (*fig.* 283) et situés de part et d'autre de ce plan à la même distance h. Quel est le volume du nouveau polyèdre ainsi obtenu? Application $a = 1^m$, $h = 0^m,25$.

Réponse. — $\frac{2h}{3}(3a^2 - 3ah\sqrt{2} + 2h^2)$ et dans le cas particulier donné : $0^{mc},344\ldots$

8. — Retrouver la formule qui donne le volume d'un tronc de pyramide quelconque en le décomposant en troncs de pyramides triangulaires.

9. — On donne le volume V, la base B et la hauteur H d'un tronc de pyramide; trouver le rapport de similitude x de la seconde base à la première.

[On résoudra l'équation $V = \frac{BH}{3}(1 + x + x^2)$].

10. — Même problème pour un tronc de pyramide de seconde espèce.

11. — Appliquer les résultats des deux exercices précédents au cas suivant : $B = 1^{mq}$, $H = 0^m,25$, $V = 0^{mc},2$.

Réponse. — Pour le tronc de première espèce : $x = 0,78...$
Pour le tronc de seconde espèce : $x = 1,78...$

12. — Même question en supposant $B = 1^{mq}$, $H = 0^{m},25$, $V = 0^{mc},075$.

Rép. — Pour le tronc de première espèce, pas de solution;
Pour le tronc de seconde espèce, deux solutions :
$x' = 0,11...$ et $x'' = 0,89...$

13. — Reprenant les questions 9 et 10, quelles sont les hauteurs des pyramides qui correspondent aux troncs trouvés?

Réponse. — Pour un tronc de première espèce, $h = \dfrac{H}{1 - x}$;

pour un tronc de seconde espèce, $h = \dfrac{H}{1 + x}$.

14. — Couper une pyramide de base B et de hauteur H par un plan parallèle à la base tel que les volumes des deux polyèdres partiels ainsi déterminés soient dans un rapport donné m?

Réponse. — Si x est la distance du plan cherché au sommet, on a : $x = H\sqrt[3]{\dfrac{m}{1+m}}$.

15. — Même question pour un tronc de pyramide de bases B et B′ et de hauteur H.

Réponse. — Si x est la distance du plan cherché au sommet de la pyramide, on a : $x = \dfrac{H}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}\sqrt[3]{\dfrac{m\sqrt{B^3} + \sqrt{B'^3}}{1+m}}$, ou, en appelant r le rapport de similitude des polygones B et B′, $x = \dfrac{H}{1-r}\sqrt[3]{\dfrac{m + r^3}{1+m}}$.

16. — Appliquer le résultat de l'exercice précédent en supposant $H = 1^{m}$, $b = \dfrac{1}{3}$, $m = \dfrac{19}{189}$.

Réponse. — $x = 0^{m},75$.

17. — Trouver la hauteur d'un tombereau, sachant qu'il contient 2000 litres, et que ses bases ont respectivement pour dimensions : $a = 2^{m}$, $b = 1^{m}$, $a' = 1^{m},20$, $b' = 0^{m},80$.

Réponse. — $h = 1^{m},37...$

18. — La formule qui donne le volume d'un tronc de pyramide et celle qui donne le volume d'un tas de pierres peuvent s'écrire

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B'')$$

en appelant H la hauteur, B et B′ les deux bases, et B″ la section faite par un plan équidistant des deux bases.

19. Dans un octaèdre régulier de côté a, le centre du carré ABCD (*fig.* 283) est équidistant des huit faces; quelle est sa distance à chaque face?

Réponse. — $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

20. — Trouver dans l'intérieur d'un tétraèdre un point tel qu'en le joignant aux quatre sommets, on décompose ce tétraèdre en quatre tétraèdres équivalents.

21. — Le plan qui passe par une arête d'un tétraèdre et le milieu de l'arête opposée le partage en deux tétraèdres équivalents.

22. — Un plan qui passe par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le partage en deux polyèdres équivalents.

23. — Calculer le volume de l'octaèdre qui a pour sommets les centres des faces d'un parallélépipède.

§ 5. — Les polyèdres semblables.

386. — Deux polyèdres qui ont le même nombre d'angles polyèdres et le même nombre de faces sont dits *semblables*, si on peut les faire correspondre l'un à l'autre de telle façon que les angles polyèdres correspondants soient égaux chacun à chacun et que les faces correspondantes soient des polygones semblables chacun à chacun : en outre, tous ces éléments doivent être disposés dans le même ordre.

Les dièdres correspondants de deux angles polyèdres correspondants égaux sont égaux; les arêtes correspondantes de deux faces correspondantes semblables sont proportionnelles.

Les divers éléments correspondants : angles polyèdres, faces, dièdres, arêtes, dans les deux polyèdres sont dits *homologues*.

Les diverses faces homologues des deux polyèdres ont le même rapport de similitude, puisqu'une même arête appartient, dans chaque polyèdre, à deux faces contiguës. Ce rapport de similitude est le rapport de similitude des deux polyèdres.

Ce qui précède montre aussi que dans les deux polyèdres *les arêtes homologues sont proportionnelles*, et que le rapport de deux arêtes homologues est égal au rapport de similitude des deux polyèdres.

387. — La théorie des polyèdres semblables est tout à fait analogue à celle des polygones semblables; aussi nous contenterons-nous d'énoncer, sans démonstration, les théorèmes suivants :

Théorème XXI

Si on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, on obtient une nouvelle pyramide semblable à la première (*fig.* 296).

Remarque. — Le plan sécant ne doit pas rencontrer les arêtes latérales sur leurs prolongements au delà du sommet S; dans ce cas, en effet, les éléments correspondants des deux pyramides considérées ne seraient pas disposés dans le même ordre.

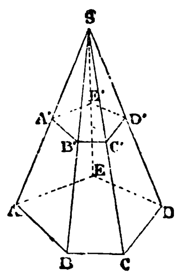


Fig. 296.

Théorème XXII

388. — **Deux pyramides triangulaires sont semblables si elles ont un angle dièdre compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.**

Théorème XXIII

389. — **Deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés sont semblables.**

Réciproquement, **deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés.**

Théorème XXIV

390. — Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube de leur rapport de similitude, c'est-à-dire aussi au cube du rapport de deux côtés homologues.

Exercices

1. — Les carrés des volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes des aires de deux faces homologues.

2. — On coupe une pyramide par un plan parallèle à la base qui divise la hauteur en parties proportionnelles à deux nombres donnés. Quel est le rapport des volumes des deux pyramides obtenues?

3. — Soient deux polyèdres semblables P et P′ et deux points M et M′ appartenant l'un à P, l'autre à P′. Ces deux points sont dits homologues, si en les joignant respectivement à trois sommets correspondants des deux polyèdres, les deux tétraèdres ainsi formés sont semblables et semblablement disposés. Les droites qui joignent deux couples de points homologues sont dites homologues; de même les plans qui passent par trois points de P et les trois points homologues de P′ sont dits homologues. Démontrer :

1° Que si deux droites ou trois plans de P se coupent en un point O, les deux droites ou les trois plans homologues dans P′ se coupent en un point O′ homologue du point O;

2° Que si deux plans de P se coupent suivant une droite D, les deux plans homologues dans P′ se coupent suivant une droite D′ homologue de la droite D;

3° Que le rapport de deux segments homologues est égal au rapport de similitude des deux polyèdres;

4° Que deux triangles ou deux tétraèdres homologues (c'est-à-dire ayant pour sommets des points homologues) sont semblables et que leur rapport de similitude est égal au rapport de similitude des deux polyèdres.

4. — Dans deux tétraèdres semblables, les hauteurs issues de deux sommets homologues sont homologues; il en est de même des droites qui joignent deux sommets homologues aux points de rencontre des médianes des faces opposées.

LIVRE VII

LES CORPS RONDS

§ 1er. — Le cylindre.

391. — On appelle *cylindre droit à base circulaire* ou plus brièvement *cylindre* le volume engendré par un rectangle OAO′A′ qui tourne autour d'un de ses côtés OO′ (*fig.* 297).

OO′ est l'*axe* du cylindre ; la droite AA′ en est l'*arête latérale* ou *génératrice* et la surface engendrée par cette droite dans le mouvement de rotation du rectangle est la *surface latérale* du cylindre.

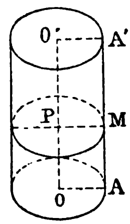


Fig. 297.

Un point quelconque M de AA′ décrit pendant le mouvement une circonférence dont le plan est perpendiculaire à OO′ et dont le rayon est la distance MP du point M à l'axe. Comme on a MP = OA, on voit que cette circonférence a un rayon constant quel que soit le point M.

Les cercles décrits par les côtés OA et O′A′ du rectangle sont les *bases* du cylindre ; la distance OO′ des deux bases est la *hauteur* du cylindre ; elle est égale à son arête latérale.

Une *section droite* de cylindre est la section faite par un plan perpendiculaire à l'axe ; d'après ce qui a été dit plus haut, c'est un cercle ayant son centre sur l'axe et égal à chacune des bases.

THÉORÈME I

392. — L'aire latérale S d'un cylindre ABA'B' a pour mesure le produit de sa hauteur H par la circonférence C de sa base (*fig.* 298).

Inscrivons dans la base du cylindre un polygone régulier, et par ses sommets menons des parallèles à l'axe du cylindre qui rencontrent la seconde base en des points qui sont les sommets d'un second polygone régulier égal au premier et inscrit dans cette seconde base.

On forme ainsi un prisme régulier inscrit dans le cylindre, et qui a pour hauteur H; si donc p est le périmètre du polygone régulier, base de ce prisme, l'aire latérale de ce prisme sera $a = p \times H$ (**347**). D'ailleurs, cette aire est manifestement plus petite que S, c'est-à-dire que l'on a $a < S$.

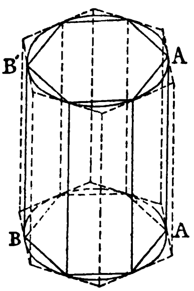


Fig. 298.

Circonscrivons maintenant à la base du cylindre un polygone régulier semblable au précédent, et par les sommets menons des parallèles à l'axe du cylindre qui rencontrent la seconde base en des points qui sont les sommets d'un second polygone régulier égal au premier et circonscrit à cette seconde base. On forme ainsi un prisme régulier circonscrit au cylindre et qui a pour hauteur H; si donc P est le périmètre du polygone régulier, base de ce prisme, l'aire latérale de ce prisme sera $A = P \times H$; d'ailleurs on a évidemment $A > S$.

Imaginons maintenant que l'on double indéfiniment le nombre des côtés des polygones réguliers dont nous venons de parler.

Les aires latérales des prismes réguliers inscrits formeront une suite de nombres toujours croissants et toujours inférieurs à S :

$$a = pH, \quad a' = p'H, \quad a'' = p''H, \ldots;$$

et ces nombres tendront vers la limite $C \times H$, puisque les périmètres p, p', p'',... tendent vers la limite C (221).

De même, les aires latérales des prismes réguliers circonscrits formeront une suite de nombres toujours décroissants et toujours supérieurs à S :

$$A = PH, \quad A' = P'H, \quad A'' = P''H, \ldots;$$

et ces nombres tendront aussi vers la limite $C \times H$, puisque les périmètres P, P′, P″,... tendent vers la limite C.

La quantité S étant toujours comprise entre deux nombres correspondants des deux suites a, a', a'',... et A, A′, A″,... et ces deux suites ayant la même limite $C \times H$, il en résulte nécessairement l'égalité :

$$S = C \times H, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

393. — Si R est le rayon de base du cylindre, on a par conséquent :

$$S = 2\pi RH$$

et la surface totale du cylindre est :

$$S' = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + H).$$

394. — La surface latérale d'un cylindre étant formée par des droites parallèles à son axe, on conçoit que l'on puisse *développer* cette surface sur un plan, après l'avoir ouverte suivant une génératrice ; elle devient alors un rectangle ayant pour hauteur H et pour base la longueur C de la circonférence de base (*fig.* 299).

Théorème II

395. — Le volume V d'un cylindre ABA′B′ a pour mesure le produit de sa hauteur H par sa base B (*fig.* 298).

Opérons comme dans la démonstration précédente ; appelons q et Q les aires des bases des prismes réguliers

inscrits et circonscrits. Les volumes u et U de ces prismes seront (365) :

$$u = qH \text{ et } U = QH;$$

d'ailleurs, on a évidemment :

$$u < V \text{ et } U > V.$$

Lorsque l'on double indéfiniment le nombre des faces de ces prismes, q et Q ont pour limite commune l'aire B

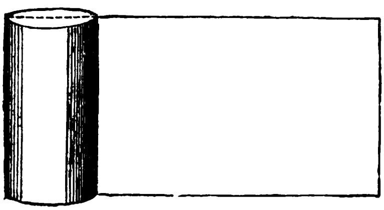


Fig. 299.

de la base du cylindre (251) et par suite u et U ont pour limite commune BH ; on en déduit comme au n° **392** :

$$V = B \times H, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

396. — Si R est le rayon de base du cylindre, on a :

$$V = \pi R^2 H,$$

d'où l'on déduit encore la relation :

$$V = \frac{RS}{2}.$$

Exercices

N. B. — Les notations du texte sont conservées.

1\. — Dans un cylindre, on donne $H = 5^m,45$, $R = 5^{mm}$. Calculer S, S' et V.

Rép. — $S = 0^{mq},1712...$; $S' = 0^{mq},1714...$; $V = 0^{mc},000428...$

2\. — Dans un cylindre, on donne $R = 0^m,1$, $S = 1^{mq}$. Calculer H, S' et V.

Réponse. — $H = 1^m,59...$; $S' = 1^{mq},0628...$; $V = 0^{mc},05.$

3. — Dans un cylindre, on donne $R = 0^{m},1$, $S' = 1^{mq}$. Calculer H, S et V.

Réponse. — $H = 1^{m},49\ldots$; $S = 0^{mq},9372\ldots$; $0^{mc},046859\ldots$

4. — Dans un cylindre, on donne $R = 0^{m},43$, $V = 1^{mc}$. Calculer H, S et S'.

Réponse. — $H = 1^{m},72\ldots$; $S = 4^{mq},65\ldots$; $S' = 5^{mq},81\ldots$

5. — Dans un cylindre, on donne $H = 1^{m}$, $S = 1^{mq}$. Calculer R, S' et V.

Rép. — $R = 0^{m},159\ldots$; $S' = 1^{mq},1592\ldots$; $V = 0^{mc},079577\ldots$

6. — Dans un cylindre, on donne $H = 1^{m}$, $S' = 1^{mq}$. Calculer R, S et V.

Rép. — $R = 0^{m},14\ldots$; $S = 0^{mq},8768\ldots$; $V = 0^{mc},0616\ldots$

7. — Dans un cylindre, on donne $H = 1^{m}$, $V = 1^{mc}$. Calculer R, S et S'.

Réponse. — $R = 0^{m},56\ldots$; $S = 3^{mq},54\ldots$; $S' = 5^{mq},54\ldots$

8. — Dans un cylindre, on donne $S = 1^{mq}$, $S' = 2^{mq}$. Calculer R, H et V.

Réponse. — $R = 0^{m},40\ldots$; $H = 0^{m},40\ldots$; $V = 0^{mc},20\ldots$

9. — Dans un cylindre, on donne $S = 1^{mq}$, $V = 1^{mc}$. Calculer R, H et S'.

Réponse. — $R = 2^{m}$; $H = 0^{m},080\ldots$; $S' = 26^{mq},13\ldots$

10. — Dans un cylindre, on donne $V = 1$ litre, $H = 4R$. Calculer R, H, S et S'. (Les vases employés pour la mesure des liquides répondent à cette condition.)

Réponse. — $R = 0^{m},043\ldots$; $H = 0^{m},172\ldots$; $S = 0^{mq},0465\ldots$; $S' = 0^{mq},0581\ldots$

11. — Même question en supposant $H = 2R$. (C'est le cas des vases employés pour la mesure des graines, etc.)

Réponse. — $0^{m},054\ldots$; $H = 0^{m},108\ldots$; $S = 0^{mq},0366\ldots$; $S' = 0^{mq},0549\ldots$

12. — Un rectangle tournant autour de chacun de ses côtés engendre des volumes mesurés respectivement par les nombres a et b; quelles sont les dimensions de ce rectangle?

13. Deux cylindres sont équivalents; quel est le rapport de leurs aires latérales?

14. — Deux cylindres ont même aire latérale; quel est le rapport de leurs volumes?

15. — Un plan parallèle à l'axe d'un cylindre ne rencontre pas ce cylindre ou le coupe suivant une ou deux génératrices suivant que sa distance à l'axe est supérieure, égale ou inférieure au rayon du cylindre; et réciproquement.

16. — Si un plan parallèle à l'axe d'un cylindre le rencontre suivant une seule génératrice, il est dit tangent au cylindre. Un plan tangent au cylindre est perpendiculaire au plan qui passe par l'axe et la génératrice de contact, et réciproquement.

17. — Deux cylindres sont semblables si le rapport de leurs rayons est égal à celui de leurs hauteurs, et la valeur commune

de ces rapports est alors le rapport de similitude des deux cylindres. Démontrer que les aires latérales et les aires totales de deux cylindres semblables ont pour rapport le carré du rapport de similitude de ces deux cylindres; et que les volumes de deux cylindres semblables ont pour rapport le cube du rapport de similitude de ces deux cylindres.

18. — Appelant secteur cylindrique la portion de cylindre comprise entre deux demi-plans limités à l'axe, trouver la surface latérale, la surface totale et le volume d'un secteur cylindrique.

19. — Si par les points d'une circonférence on mène des droites égales entre elles parallèles à une même direction quelconque, leurs extrémités sont sur une seconde circonférence égale à la première, et dont le plan est parallèle au plan de la première; on obtient ainsi un cylindre oblique à base circulaire. Le volume d'un tel cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur (c'est-à-dire la distance des deux plans de base).

20. — Si on coupe un cylindre droit par deux plans parallèles, on obtient un cylindre à section droite circulaire; l'aire latérale de ce cylindre est égale au produit de son arête latérale par le périmètre de sa section droite, et son volume est égal au produit de son arête latérale par l'aire de sa section droite.

21. — Si on coupe un cylindre droit par deux plans quelconques, on obtient un tronc de cylindre à section droite circulaire qui a même surface latérale et même volume qu'un cylindre qui aurait pour base sa section droite et pour hauteur la distance des deux points où les plans de base rencontrent l'axe.

22. — Si on coupe un cylindre oblique à base circulaire par un plan quelconque, on obtient un tronc de cylindre à base circulaire; son volume est égal au produit de l'aire de sa base circulaire par la distance à cette base du point où le plan sécant rencontre la parallèle aux génératrices menée par le centre de la base circulaire.

§ 2. — Le cône.

397. — On appelle *cône droit à base circulaire* ou plus brièvement *cône* le volume engendré par un triangle rectangle SOA qui tourne autour de l'un des côtés de l'angle droit SO (*fig.* 300).

Le point S est le *sommet* du cône; SO en est l'*axe*.

L'hypoténuse SA est le *côté* ou l'*arête latérale*, ou la *génératrice*, ou encore l'*apothème* du cône, et la surface

engendrée par cette droite dans le mouvement de rotation du triangle est la *surface latérale* du cône.

Un point quelconque A′ de SA décrit, pendant le mouvement, une circonférence dont le plan est perpendiculaire à SO et dont le rayon est la distance A′O′ du point A′ à l'axe.

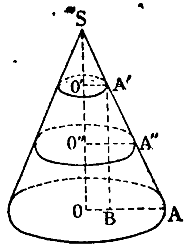


Fig. 300.

Le cercle décrit par le côté OA du rectangle est la *base* du cône; la distance OS du sommet à la base est la *hauteur* du cône.

Entre le rayon de base R du cône, son apothème A et sa hauteur H, existe la relation :

$$A^2 = R^2 + H^2.$$

398. — Si l'on coupe un cône SOA par un plan O′A′ parallèle à sa base, on obtient un *tronc de cône à bases parallèles* ou simplement *tronc de cône* OAO′A′ : ce solide peut être regardé comme engendré par la rotation d'un trapèze rectangle autour du côté perpendiculaire aux bases.

Les deux cercles engendrés par OA et O′A′ sont les *bases* du tronc de cône; OO′ en est l'*axe*; la droite AA′ en est le *côté*, ou l'*arête latérale*, ou la *génératrice*, ou encore l'*apothème*, et la surface engendrée par cette droite dans le mouvement de rotation du trapèze est la *surface latérale* du tronc de cône.

La distance OO′ des deux bases est la *hauteur* du tronc de cône.

Appelons R et R′ les rayons des bases d'un tronc de cône, A son apothème et H sa hauteur; on aura la relation :

$$A^2 = (R - R')^2 + H^2$$

que donne le triangle rectangle ABA′ obtenu en menant A′B parallèle à OO′.

Si, en outre, *h* et *a* sont la hauteur et l'apothème du

cône SOA, auquel appartient le tronc de cône, et si de même h' et a' sont la hauteur et l'apothème du cône SO'A' qui, avec le tronc de cône, complète le cône SOA, les triangles semblables SOA, S'O'A' donnent les relations :

$$\frac{a}{a'}=\frac{h}{h'}=\frac{R}{R'},$$

et comme on a de plus :

$$a-a'=A, \qquad h-h'=H,$$

on en déduit :

$$a=\frac{AR}{R-R'}, \qquad h=\frac{HR}{R-R'},$$

$$a'=\frac{AR'}{R-R'}, \qquad h'=\frac{HR'}{R-R'}.$$

Enfin, remarquons que le plan équidistant des deux bases détermine dans le tronc de cône une section circulaire O''A'', qui est dite *section moyenne*, et dont le rayon R'' est évidemment donné par la relation

$$R''=\frac{R+R'}{2}.$$

Théorème III

399. — L'aire latérale S d'un cône SOA a pour mesure la moitié du produit de son apothème A par la circonférence C de sa base (*fig.* 301).

Inscrivons dans la base du cône un polygone régulier et joignons ses sommets au point S; on forme ainsi une pyramide régulière inscrite dans le cône; si p est le périmètre du polygone régulier, base de cette pyramide, et si a est l'apothème de cette pyramide, sa surface latérale t sera $t=\frac{1}{2}p\times a$ (**373**), et, en outre, cette aire

sera manifestement inférieure à S, de sorte que l'on aura

$$t < S.$$

Circonscrivons maintenant à la base du cône un polygone régulier semblable au précédent et joignons ses sommets au point S. On forme ainsi une pyramide régulière circonscrite au cône et dont l'apothème coïncide avec l'apothème A du cône. Si donc on appelle T la surface latérale de cette pyramide et P le périmètre de sa base, on aura $T = \frac{1}{2} P \times A$; d'ailleurs, on a évidemment :

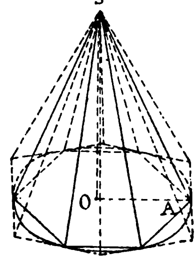


Fig. 301.

$$T > S.$$

Si l'on double indéfiniment le nombre des côtés des polygones réguliers considérés, p et P tendent vers la limite C; en même temps, a tend évidemment vers A. Les quantités t et T ont, par suite, pour limite commune $\frac{1}{2} C \times A$, et, comme elles comprennent entre elles la quantité fixe S, on a nécessairement :

$$S = \frac{1}{2} C \times A, \quad \text{c. q. f. d.}$$

400. — R étant le rayon de base du cône, on a :

$$S = \pi RA.$$

La surface totale S′ du cône est, par suite :

$$S' = \pi RA + \pi R^2 = \pi R(R + A).$$

Théorème IV

401. — L'aire latérale S d'un tronc de cône OAO′A′ a pour mesure la moitié du produit de

son apothème A par la somme des circonférences C et C′ de ses deux bases (*fig.* 300).

L'aire latérale du tronc de cône considéré est la différence des aires latérales des deux cônes SOA, SO′A′.

Inscrivons dans le cône SOA une pyramide régulière P ; la base O′A′ du tronc de cône partage cette pyramide en une seconde pyramide régulière P′ (**370**) et un tronc de pyramide régulier T ; d'après le théorème précédent, si le nombre des faces de cette pyramide double indéfiniment, la limite de son aire latérale est la surface latérale du cône SOA, et de même la limite de l'aire latérale de la seconde pyramide P′ est la surface latérale du cône SO′A′ : l'aire latérale du tronc T étant la différence des aires latérales des pyramides P et P′, de même que l'aire latérale du tronc de cône considéré est la différence des aires latérales des cônes SOA et SO′A′, il résulte de ce qui précède que l'aire latérale du tronc de cône considéré est la limite de l'aire latérale du tronc de pyramide T. Mais cette dernière quantité est égale à $\frac{1}{2}(p+p')a$ (**374**) en appelant a l'apothème du tronc T, p et p' les périmètres de ses bases. D'ailleurs, a tend évidemment vers A, et p et p' tendent respectivement vers C et C′ : l'aire latérale S du tronc de cône a donc pour valeur :

$$\frac{1}{2}A(C+C'), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

402. — Si R et R′ sont les rayons des bases du tronc de cône, on a :

$$S=\pi A(R+R'),$$

ce qu'on peut écrire :

$$S=2\pi AR'' \qquad (\textbf{378}).$$

On peut donc dire encore que *l'aire latérale d'un tronc de cône est égale au produit de son apothème par la circonférence de sa section moyenne.* Cet énoncé s'applique d'ailleurs aussi au cône lui-même.

La surface totale du tronc sera :

$$S' = \pi A(R + R') + \pi R^2 + \pi R'^2$$
$$= \pi[R(R + A) + R'(R' + A)].$$

403. — La surface latérale d'un cône SOA étant formée par des droites passant par le point fixe S, on conçoit qu'on puisse *développer* cette surface sur un plan après l'avoir ouverte suivant une génératrice; elle devient alors évidemment un secteur circulaire SAA_1 de centre S et de rayon SA, puisque toutes les génératrices sont égales à SA (*fig.* 302).

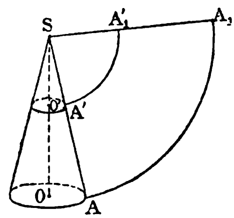


Fig. 302.

La longueur de l'arc AA_1 est égale à la circonférence de base du cône, et a par suite pour valeur $2\pi R$. Il est facile d'en conclure la mesure n, en degrés, de l'angle au centre du secteur SAA_1 ; on a, en effet (230) :

$$2\pi R = \frac{\pi A n}{180},$$

et par suite

$$n = 360 \frac{R}{A}.$$

La surface latérale d'un tronc de cône OAO'A' se développe de même et produit un secteur de couronne circulaire $AA_1A'A_1'$.

Théorème V

404. — Le volume V d'un cône SOA a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur H par sa base B (*fig.* 301).

Opérons comme au n° **399**; les pyramides régulières inscrite et circonscrite ont même hauteur H que le cône;

si donc q et Q sont les aires de leurs bases, et si u et U désignent leurs volumes, on a :

$$u = \frac{1}{3} q\mathrm{H}, \quad \text{et} \quad \mathrm{U} = \frac{1}{3}\mathrm{QH};$$

d'ailleurs, on a évidemment :

$$u < \mathrm{V} \quad \text{et} \quad \mathrm{U} > \mathrm{V}.$$

Lorsque l'on double indéfiniment le nombre des faces de ces pyramides, q et Q ont pour limite commune l'aire B de la base du cône (251) et par suite u et U ont pour limite commune $\frac{1}{3}$ BH ; ces quantités comprenant toujours entre elles la quantité fixe V, on a donc nécessairement :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\mathrm{B} \times \mathrm{H}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

405. — Si R est le rayon de base du cône, on a :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2\mathrm{H}.$$

THÉORÈME VI

406. — Le volume V d'un tronc de cône OAO'A est égal à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur H du tronc et pour bases respectives les deux bases B et B' du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases (*fig.* 300).

Le volume du tronc de cône considéré est la différence des volumes des deux cônes SOA, SO'A'. Raisonnant alors comme au n° 401, on voit que le volume cherché V est la limite du volume u du tronc de pyramide T. Si q et q' sont les bases de ce tronc, qui a même hauteur H que le tronc de cône donné, on a (381) :

$$u = \frac{\mathrm{H}}{3}(q + q' + \sqrt{qq'}).$$

Mais q et q' ont respectivement pour limites B et B′, en même temps que u a pour limite V ; on a donc :

$$V = \frac{H}{3}(B + B' + \sqrt{BB'}),$$

ce qui démontre le théorème.

407. — Si R et R′ sont les rayons des bases du tronc de cône, on a :

$$B = \pi R^2 \quad B' = \pi R'^2, \text{ et par suite } \sqrt{BB'} = \pi RR'.$$

Il en résulte :

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R'^2 + RR').$$

408. — Pour le *cubage des troncs d'arbres non équarris*, on se sert de la formule qui donne le volume d'un tronc de cône : un tel tronc d'arbre peut, en effet, être assimilé à un tronc de cône ; on a donc :

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R'^2 + RR') ;$$

si les deux bases du tronc sont peu différentes, on simplifie le calcul en assimilant l'arbre à un cylindre ayant même hauteur et pour section droite la section moyenne du tronc ; on a donc :

$$V = \pi HR''^2.$$

Comme on a $R'' = \frac{R + R'}{2}$, l'erreur commise a pour valeur :

$$\frac{1}{12}\pi H(R - R')^2.$$

En réalité, on ne peut pas mesurer R″, mais seulement la circonférence C″ de la section moyenne ; or, on a :

$$C'' = 2\pi R'',$$

d'où

$$R'' = \frac{C''}{2\pi},$$

et par suite

$$V = \frac{C''^2 H}{4\pi}.$$

409. — De même, pour le *jaugeage des tonneaux*, on assimile le fût à mesurer à un double tronc de cône (*fig.* 303). Si donc H est la longueur du tonneau, si R est le rayon de section moyenne OA ou *bouge*, et si R′ est le rayon de ses *fonds* O′A′ et O″A″, on aura son volume V par la formule :

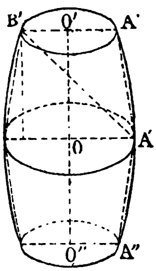


Fig. 303.

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R'^2 + RR').$$

Cette formule donne un résultat évidemment trop faible ; aussi emploie-t-on souvent, surtout en Angleterre, la formule suivante, dite formule d'Oughtred :

$$V = \frac{\pi H}{3}(2R^2 + R'^2),$$

qui donne un résultat trop fort.

On emploie encore la formule suivante qui donne, avec la forme générale des tonneaux, les meilleurs résultats :

$$V = \frac{\pi H}{3}\left(2R^2 + R'^2 - \frac{1}{3}(R^2 - R'^2)\right).$$

Exercices

N. B. — Les notations du texte sont conservées.

1. — Dans un cône, on donne $R = 3^m$, $H = 2^m,25$. Calculer les autres éléments.

Réponse. — $A = 3^m,75$; $S = 35^{mq},343...$; $S' = 63^{mq},617...$; $V = 21^{mc},2058...$

2. — Même question, connaissant $R = 0^m,60$, $A = 0^m,75$.

Réponse. — $H = 0^m,45$; $S = 1^{mq},4137...$; $S' = 2^{mq},5447...$; $V = 0^{mc},169646...$

3. — Même question, connaissant $A = 1^m,25$, $H = 0^m,75$.

Réponse. — $R = 1^m$; $S = 3^{mq},9270...$; $S' = 7^{mq},0686...$; $V = 0^{mc},785398...$

4. Même question, connaissant $R = 1^m$, $S = 10^{mq}$.

Rép. — $A = 3^m,183...$; $H = 3^m,021...$; $S' = 13^{mq},1416...$; $V = 3^{mc},1636...$

5. — Même question, connaissant $R = 1^m$, $S' = 10^{mq}$

Rép. — $A = 2^m,183...$; $H = 1^m,940...$; $S = 6^{mq},8584...$; $V = 2^{mc},0316...$

6. — Même question, connaissant $R = 1^m$, $V = 1^{mc}$.

Réponse. — $H = 0^m,955...$; $A = 1^m,382...$; $S = 4^{mq},3417..$; $S' = 7^{mq},4832...$

7. — Même question, connaissant $H = 1^m$, $S = 3^{mq}$.

Réponse. — $R = 0^m,76...$; $A = 1^m,25...$; $S' = 4^{mq},81...$; $V = 0^{mc},605...$

8. — Même question, connaissant $H = 1^m$, $S' = 1^{mq}$.

Réponse. — $R = 0^m,25...$; $A = 1^m,03...$; $S = 0^{mq},805...$; $V = 0^{mc},065...$

9. — Même question connaissant $H = 1^m$, $V = 1^{mc}$.

Réponse. — $R = 0^m,98...$; $A = 1^m,40...$; $S = 4^{mq},31...$; $S' = 7^{mq},31...$

10. — Même question, connaissant $A = 1^m$, $S = 1^{mq}$.

Réponse. — $R = 0^m,32...$; $H = 0^m,95...$; $S' = 1^{mq},32...$; $V = 0^{mc},102...$

11. — Même question, connaissant $A = 1^m$, $S' = 1^{mq}$.

Réponse. — $R = 0^m,25...$; $H = 0^m,97...$; $S = 0^{mq},78...$; $V = 0^{mc},063...$

12. — Même question, connaissant $S = 1^{mq}$, $S' = 3^{mq}$.

Réponse. — $R = 0^m,80...$; $A = 0^m,40...$; $H = 0^m,69...$; $V = 0^{mc},46...$

13. — Calculer les éléments d'un cône, connaissant S' et V; discussion.

Le problème a deux solutions, à la condition que l'on ait $S' > \sqrt[3]{72\pi V^2}$; sinon il n'en a pas.

Application. $S' = 10^{mq}$, $V = 1^{mc}$.

1re solution : $R = 0^m,31...$; $H = 9^m,95...$; $A = 9^m,96...$; $S = 9^{mq},70...$

2e solution. — $R = 1^m,22...$; $H = 0^m,64...$; $A = 1^m,38...$; $S = 5^{mq},27...$

14. — Un triangle rectangle tournant successivement autour des deux côtés de son angle droit engendre des volumes mesurés par les nombres a et b. Quelles sont les dimensions de ce rectangle?

15. — Un plan qui passe par le sommet d'un cône ne rencontre pas ce cône, ou le coupe suivant une ou deux génératrices, suivant que sa trace sur le plan de base ne rencontre

pas, ou rencontre en un ou deux points la circonférence de base; et réciproquement.

16. — Si un plan passant par le sommet d'un cône le rencontre suivant une seule génératrice, il est dit tangent au cône. Un plan tangent à un cône est perpendiculaire au plan qui passe par l'axe et la génératrice de contact, et réciproquement.

17. — Deux cônes S et S′ sont dits semblables si les deux triangles rectangles qui les engendrent sont semblables. On a alors $\frac{R}{R'}=\frac{H}{H'}=\frac{A}{A'}$, et la valeur commune de ces rapports est le rapport de similitude des deux cônes. Démontrer que le rapport des aires latérales ou totales de deux cônes semblables est égal au carré de leur rapport de similitude; et que le rapport des volumes de deux cônes semblables est égal au cube de leur rapport de similitude.

18. — Si on coupe un cône par un plan parallèle à sa base, on détermine un second cône semblable au premier.

19. — Deux troncs de cône T et T′ sont semblables si les deux trapèzes rectangles qui les engendrent sont semblables. On a alors $\frac{R}{R_1}=\frac{R'}{R'_1}=\frac{H}{H_1}=\frac{A}{A_1}$, et la valeur commune de ces rapports est le rapport de similitude des deux troncs de cône. Démontrer les mêmes théorèmes que dans l'exercice 17.

20. Appelant secteur conique la portion de cône comprise entre deux demi-plans limités à l'axe, trouver la surface latérale, la surface totale et le volume d'un secteur conique.

21. — Même question, pour un tronc de secteur conique.

22. — Si on joint un point à tous les points d'une circonférence, on forme un cône oblique à base circulaire. Le volume d'un tel cône est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur (c'est-à-dire la distance du point fixe ou sommet au plan de la circonférence).

23. — Quel est le volume d'un tronc de cône oblique à base circulaire, les deux bases étant supposées parallèles, et par suite circulaires toutes deux?

24. — Quel est le cône dont la surface latérale se développe suivant un demi-cercle? Montrer que sa section par un plan passant par l'axe est un triangle équilatéral. Evaluer sa surface latérale, sa surface totale et son volume en fonction de son rayon de base ou de son côté.

25. — Calculer la surface latérale et le volume d'un tronc de cône en le considérant directement comme la différence de deux cônes.

26. — On appelle tronc de cône de seconde espèce le solide obtenu en coupant la surface latérale d'un cône prolongée au delà de son sommet par un plan parallèle à la base. Eva-

luer les éléments de ce solide. [Soient R et R′ les rayons des bases, A l'apothème, H la hauteur, S et S′ les surfaces latérale et totale, V le volume, a et a', h et h' les apothèmes et les hauteurs des cônes dont le tronc considéré est la somme, on a :

$$A^2 = H^2 + (R + R')^2,\ S = \pi A \frac{R^2 + R'^2}{R + R'},$$

$$S' = \pi \frac{R^2 + R'^2}{R + R'}(A + R + R'),\ V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R'^2 - RR'),$$

$$a = \frac{AR}{R + R'},\ a' = \frac{AR'}{R + R'},\ h = \frac{HR}{R + R'},\ h' = \frac{HR'}{R + R}\Big].$$

27. — Partager la surface latérale ou le volume d'un cône ou d'un tronc de cône en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés par un plan parallèle à la base.

28. — Calculer les éléments d'un cône, connaissant sa surface latérale, ou sa surface totale, ou son volume et sachant que

$$\frac{A}{R} = k, \text{ ou bien } \frac{H}{R} = k', \text{ ou bien } \frac{R}{H} = m.$$

29. — Inscrire dans un cône donné un cylindre de volume donné. Discussion.

30. — Circonscrire à un cylindre donné un cône de volume donné. Discussion.

31. — Quel est le volume d'un tronc d'arbre de 5^m de hauteur, les rayons des bases ayant 30^{cm} et 20^{cm}?

Réponse. — $0^{mc},995...$; la formule abrégée donnerait $0^{mc},982...$

32. — Quelle est la capacité d'un tonneau qui a 75^{cm} de longueur, 34^{cm} de rayon de bouge et 30^{cm} de rayon de fond?

Les diverses formules donnent 242^l, 252^l, 249^l.

33. — Quels sont les éléments d'un tronc de cône (de première ou de seconde espèce) dans lequel on donne R, R′, S?

34. — Même question, connaissant R, R′, S′.

35. — Même question, connaissant R, R′, V.

36. — Même question, connaissant R, A, S. Discussion.

Application. — Calculer R′ et H avec $S = 10^{mq}$, $A = 2^m$, $R = 1^m$. — On trouve :

1° Un tronc de première espèce : $R' = 0^m,59...$; $H = 1^m,96...$

2° Un tronc de seconde espèce : pas de solution.

37. — Même question, connaissant R, A, S′.

38. — Même question, connaissant R, H, V.

39. — Même question, connaissant R, S, S′.

40. — Même question, connaissant A, H, S.

41. — Même question, connaissant A, H, S′.

42. — Même question, connaissant A, H, V.

43. — Même question, connaissant A, S, S′.
44. — Même question, connaissant H, S, S′.
45. — Même question, connaissant H, S, V.
46. — Même question, connaissant H, S′, V.

§ 3. — La sphère.

410. — Le lieu géométrique des points de l'espace qui sont à une distance constante donnée d'un point fixe O est une surface appelée *sphère* (*fig.* 304).

La longueur constante donnée est le *rayon;* le point O est le *centre* de la sphère.

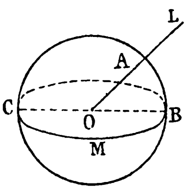


Fig. 304.

Sur chaque demi-droite OL, issue du point O, il y a un point A et un seul appartenant à la sphère : cette remarque nous donne une idée nette de la forme de la sphère qui est une surface fermée.

Le segment OA, qui va du centre à un point quelconque A de la sphère, est un *rayon ; tous les rayons de la sphère sont égaux.*

Un point est intérieur ou extérieur à une sphère, suivant que sa distance au centre est inférieure ou supérieure au rayon, et réciproquement.

Le volume limité par la surface de la sphère s'appelle aussi *sphère.*

Deux sphères de même rayon sont égales ; car, si on fait coïncider leurs centres, elles coïncideront nécessairement.

Une sphère ne cesse pas de coïncider avec elle-même, si on la fait tourner d'une façon quelconque autour de son centre.

411. — La section d'une sphère par un plan passant par son centre est le lieu géométrique des points de ce plan équidistants du point O : c'est donc une circonférence BC, ayant même centre et même rayon que la sphère ; cette circonférence est appelée un *grand cercle* de la sphère. *Tous les grands cercles d'une sphère sont égaux.*

412. — Une *corde* d'une sphère est la droite limitée qui joint deux points de la sphère. La corde s'appelle *diamètre* si elle passe par le centre. Tout diamètre BC est la somme de deux rayons, et par suite *tous les diamètres sont égaux.*

Le diamètre est la plus grande corde de la sphère (même démonstration qu'au n° **90**).

Considérons un grand cercle quelconque de la sphère, et soit BC un de ses diamètres. Si l'on fait tourner la demi-circonférence BMC autour de BC, il est clair, d'après la définition, que la surface ainsi engendrée coïncide avec la sphère elle-même ; car tous les points de cette demi-circonférence ne cessent pas, pendant le mouvement, d'être à une distance du centre égale au rayon.

On peut donc regarder la sphère comme engendrée par la révolution d'un demi-grand cercle quelconque autour d'un de ses diamètres.

413. — Deux points de la sphère, non diamétralement opposés, déterminent un grand cercle, puisque le plan de celui-ci doit contenir aussi le point O.

Les plans de deux grands cercles de la sphère se coupent suivant une droite qui passe par leur centre commun O et qui par suite est un diamètre de chacun d'eux : on peut donc dire encore que *deux grands cercles de la sphère se coupent mutuellement en parties égales.*

414. — *Tout grand cercle* ABC *d'une sphère* O *divise la surface et le volume de cette sphère en deux parties égales* (*fig.* 305).

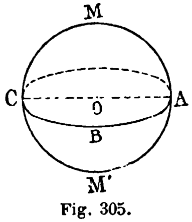


Fig. 305.

En effet, si l'on prend la partie ABCM de la sphère et qu'on la retourne de façon à lui conserver toujours pour base le grand cercle ABC, tout point de cette partie vient coïncider avec un point de la partie ABCM′, sans quoi la sphère ne serait pas le lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe. Ces deux parties, qui

reçoivent le nom d'*hémisphères*, sont donc superposables et ont par suite même surface et même volume, c. q. f. d.

415. — Soit une sphère O et une droite AB ne passant pas par le centre (*fig.* 306). Les points communs à la sphère et à cette droite, s'ils existent, sont dans le plan OAB, et par suite appartiennent au grand cercle déterminé par ce plan. Nous pouvons donc dire (**83**) que :

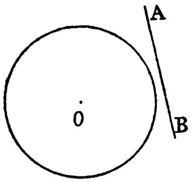


Fig. 306.

Une droite AB *ne rencontre pas une sphère, la rencontre en un seul point ou en deux points, suivant que la distance du centre à cette droite est supérieure, égale ou inférieure au rayon; et réciproquement.*

Si la droite rencontre la sphère en un seul point C (*fig.* 307), elle est dite *tangente* à la sphère; elle est perpendiculaire au rayon OC qui aboutit au point de contact, et réciproquement.

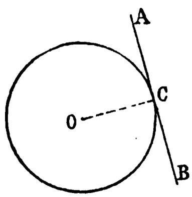


Fig. 307.

Si la droite rencontre la sphère en deux points C et D (*fig.* 308), elle est *sécante*, et le milieu P de la corde CD est le pied de la distance du centre à cette corde.

416. — On démontrera exactement comme au n° **83**, en se servant des propriétés des perpendiculaires et obliques à un plan, que :

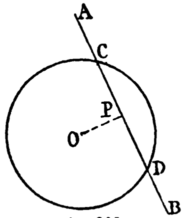


Fig. 308.

Un plan P *ne rencontre pas une sphère, la rencontre en un seul point ou suivant une courbe, selon que la distance du centre à ce plan est supérieure, égale ou inférieure au rayon; et réciproquement.*

417. — Quand le plan rencontre la sphère en un seul point A (*fig.* 309), il est dit *tangent* à la sphère; il est

perpendiculaire au rayon OA qui aboutit au point de contact, et réciproquement.

Toute droite A menée dans le plan P par le point A est tangente à la sphère; et, réciproquement, toute tangente à la sphère au point A est dans le plan P.

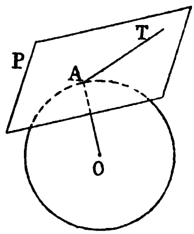


Fig. 309.

La sphère est située tout entière d'un même côté de chacun de ses plans tangents.

418. — Quand le plan rencontre la sphère suivant une courbe (*fig.* 310), *cette courbe est une circonférence.* Soit, en effet, la perpendiculaire abaissée du centre O sur le plan P, et soit M un point quelconque de l'intersection. Les obliques telles que OM sont toutes égales comme rayons; par suite, leurs pieds M sont équidistants du pied de la perpendiculaire, de sorte que l'intersection est une circonférence de centre A.

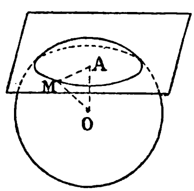


Fig. 310.

Si le plan ne passe pas par le centre de la sphère, cette circonférence s'appelle un *petit cercle* de la sphère. Il faut trois points de la sphère pour déterminer un petit cercle, puisqu'il faut trois points pour déterminer un plan.

419. — Soit R le rayon de la sphère, r le rayon d'un petit cercle, d la distance du plan de ce petit cercle au centre de la sphère; le triangle rectangle OAM fournit la relation

$$r^2 + d^2 = R^2.$$

Cette relation nous montre en particulier que *deux petits cercles également éloignés du centre de la sphère sont égaux; et que le rayon d'un petit cercle diminue à mesure que son plan s'éloigne du centre de la sphère.*

420. — La perpendiculaire OA sur le plan d'un cercle quelconque de la sphère, coupe celle-ci en deux points

P et P′ qui sont dits les *pôles* de ce cercle (*fig.* 311).

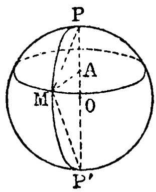


Fig. 311.

Les *distances des points* P *à* P′ *à un point quelconque* M *du cercle considéré sont constantes;* car toutes les obliques telles que PM ou P′M sont équidistantes du pied A de la perpendiculaire PA ou P′A. Si nous appelons p et p' ces *distances polaires* constantes, on a dans le triangle PMP′ rectangle comme inscrit dans le demi-grand cercle PMP′

$$p^2 = \mathrm{PP'} \times \mathrm{PA}, \quad p'^2 = \mathrm{PP'} \times \mathrm{P'A}$$

ou en gardant les notations précédentes :

$$p^2 = 2\mathrm{R}(\mathrm{R} - d), \quad p'^2 = 2\mathrm{R}(\mathrm{R} + d).$$

Les arcs tels que PM *ou* P′M *sont aussi constants,* comme appartenant à des circonférences égales comme grands cercles, et étant sous-tendus par des cordes égales. Quand le cercle considéré devient un grand cercle, on a :

$$p^2 = p'^2 = 2\mathrm{R}^2,$$

et les arcs tels que PM et P′M sont tous égaux à un quadrant.

421. — Il est clair que les réciproques de proposition que nous venons de démontrer sont toutes vraies. Il en résulte que l'on peut aisément tracer sur une sphère solide un cercle ayant un pôle donné et une distance polaire donnée : il suffit de se servir, comme d'un compas ordinaire, d'un compas à branches courbes ou *compas sphérique*, afin de ne pas être gêné par la forme de la sphère.

Le cercle tracé sera un grand cercle si la distance polaire employée est $\mathrm{R}\sqrt{2}$, c'est-à-dire le côté du carré inscrit dans un grand cercle. Pour avoir cette distance, il faut connaître le rayon R de la sphère, de sorte que nous sommes amenés à résoudre le problème suivant.

Problème

422. — Trouver le rayon d'une sphère solide (*fig.* 312).

D'un point P de la surface avec une ouverture de compas arbitraire p comme distance polaire, décrivons un cercle sur la sphère. Marquons trois points A, B, C sur ce cercle et mesurons leurs distances à l'aide du compas sphérique. Nous pouvons alors construire sur une feuille de papier un triangle A′B′C′ égal au triangle ABC; soit O′ le centre du cercle circonscrit à ce triangle; O′A′ est le rayon r du cercle ABC décrit sur la sphère. Par O′ menons une perpendiculaire à O′A′ sur laquelle nous prenons un point P′ tel que $A'P' = p$; enfin, menons par A′ une perpendiculaire à A′P′ qui rencontre O′P′ en P'_1; la droite $P'P'_1$ est le diamètre de la sphère cherchée, car nous avons construit sur la feuille de papier le triangle rectangle PAP_1 de l'espace, P_1 étant le second pôle du cercle décrit ABC.

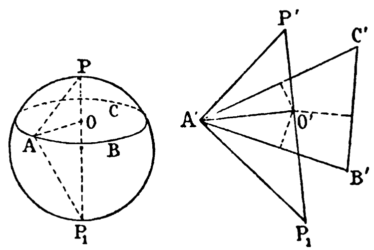


Fig. 312.

Théorème VII

423. — Par quatre points A, B, C, D non situés dans un même plan, on peut faire passer une sphère et une seule (*fig.* 313).

Les plans menés perpendiculairement sur les trois droites AB, AC, AD en leurs milieux se coupent en un point unique O d'après l'énoncé, et ce point est équidistant des quatre points A, B, C, D : car on voit immédia-

tement que le lieu des points équidistants de deux points fixes est le plan perpendiculaire à la droite qui joint ces deux points en son milieu. D'après cette même propriété, il ne peut pas y avoir d'autre point équidistant des quatre points A, B, C, D; ce qui démontre complètement le théorème.

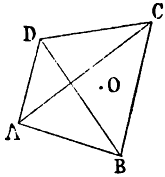


Fig. 313.

Remarque. — Il résulte de la démonstration précédente que les plans menés perpendiculairement aux six arêtes du tétraèdre ABCD en leurs milieux se coupent au point O.

THÉORÈME VIII

424. — Si deux sphères O et O′ ont un point commun A en dehors de la ligne des centres OO′, elles ont en commun une circonférence dont le plan est perpendiculaire à OO′, et dont le centre est par suite sur OO′.

Si deux sphères ont un point commun A sur la ligne des centres, elles sont tangentes en ce point et n'ont pas d'autre point commun.

Envisageons d'abord le premier cas (*fig.* 314) et coupons les sphères par le plan AOA′. En faisant tourner les demi-circonférences BAC, B′AC′ autour de OO′, on engendre les deux sphères : celles-ci ont donc en commun la ligne engendrée pendant ce mouvement par le point A, c'est-à-dire une circonférence placée comme l'indique l'énoncé.

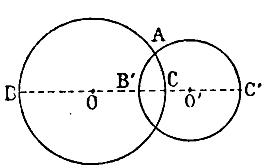


Fig. 314.

La seconde partie du théorème se démontre d'une façon analogue.

425. — Les réciproques des propositions précédentes sont vraies.

On démontrera de la même façon des propositions tout

à fait semblables à celles des nos **104** et **105** sur les relations qui ont lieu entre la distance des centres et les rayons de deux sphères suivant leur position relative.

426. — Soit une sphère O et un point extérieur S (*fig.* 315). Un plan quelconque mené par la droite OS coupe la sphère suivant un grand cercle C; menons une tangente SA à ce grand cercle, et soit B la projection du point de contact A sur OS. Faisons tourner la figure autour de OS; le demi-grand cercle C′AC″ engendre la sphère, et le triangle rectangle SAB engendre un cône dont toutes les génératrices sont comme SA tangentes à la sphère, puisque SA est perpendiculaire au rayon OA.

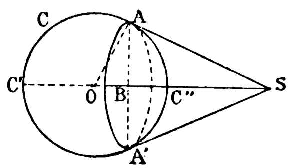


Fig. 315.

Le cône est dit *circonscrit* à la sphère, et la ligne de contact est la circonférence de base du cône, c'est-à-dire le petit cercle engendré pendant le mouvement par le point A et qui a son centre au point B. Ceci nous montre encore que *toutes les tangentes menées à une sphère par un point extérieur* S *sont égales.*

On voit aussi que les plans tangents à la sphère, menés par le point extérieur S, sont les plans passant par une génératrice

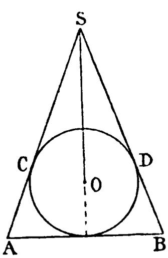


Fig. 316.

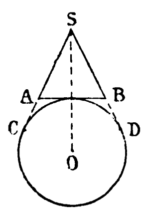


Fig. 317.

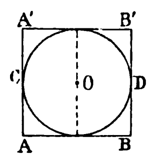


Fig. 318.

quelconque SA du cône circonscrit perpendiculairement au plan SOA : car un tel plan est perpendiculaire au rayon OA qui aboutit au point de contact.

427. — Nous dirons encore qu'un cône ou un cylindre

est *circonscrit* à la sphère, lorsque l'axe du cône ou du cylindre coïncidant avec un diamètre de la sphère, les sections de ces corps par un plan passant par ce diamètre présenteront les dispositions indiquées par les figures 316, 317, 318.

Dans le cas de la première et de la troisième figure, la sphère est dite *inscrite* au cône SAB ou au cylindre ABA'B'. Dans le cas de la seconde figure, la sphère est dite *exinscrite* au cône SAB.

Exercices

1. — Quel est le lieu géométrique des points qui sont à des distances données de deux points donnés?

2. Quels sont les points qui sont à des distances données de trois points donnés?

3. Si trois sphères se coupent deux à deux, elles ont deux points communs situés symétriquement par rapport au plan des centres.

4. — Mener un plan tangent à une sphère parallèlement à une droite donnée, ou à un plan donné.

5. — Mener un plan tangent à une sphère par une droite donnée.

6. — Calculer le rayon d'une sphère, connaissant les rayons de deux sections parallèles et la distance de ces sections.

7. Un cône est circonscrit à une sphère, ainsi que l'indique la figure 315. — Quelles relations ont lieu entre le rayon r de la sphère et le rayon de base R, l'apothème A, et la hauteur H du cône?

Réponse. — $rH = AR$, $A^2 = R^2 + H^2$.

8. — Même question, en supposant la sphère inscrite au cône, comme l'indique la figure 316.

Réponse. — $r = \dfrac{HR}{A + R}$, $A^2 = R^2 + H^2$.

9. — Même question, en supposant la sphère exinscrite au cône, comme l'indique la figure 317.

Réponse. — $r = \dfrac{HR}{A - R}$, $A^2 = R^2 + H^2$.

10. — Même question, pour une sphère de rayon r inscrite dans un cylindre de rayon de base R et de hauteur H.

Réponse. — $r = R = \dfrac{H}{2}$.

11. — Même question, pour une sphère de rayon r inscrite dans un tronc de cône dont les rayons de base sont R et R′, la hauteur H, et l'apothème A (*fig.* 319).

Réponse. — $H = 2r$, $A = R + R'$,
$r^2 = RR'$.

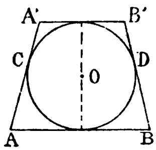


Fig. 319.

12. — Quel est le lieu géométrique des points de l'espace dont le rapport des distances à deux points fixes est constant?

13. — Quel est le lieu géométrique des points de l'espace dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante?

N. B. — Plus généralement, on pourra chercher à étendre à l'espace, et en particulier à la sphère, les différentes questions traitées dans le texte ou proposées comme exercices en géométrie plane et particulièrement celles qui sont relatives au cercle.

§ 4. — L'aire et le volume de la sphère.

Théorème IX

428. — La surface engendrée par une droite AB qui tourne autour d'un axe XY qu'elle ne traverse pas a pour mesure le produit de la projection A′B′ de cette droite sur XY par la circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire MO élevée sur AB en son milieu M et limitée à son point de rencontre O avec XY.

Le théorème est évident si AB est parallèle à XY; car alors la surface engendrée par AB est celle d'un cylindre dont la hauteur est A′B′ et le rayon de base MO (*fig.* 320).

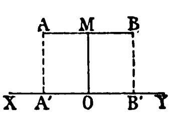


Fig. 320.

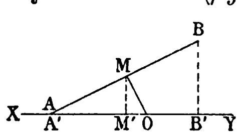


Fig. 321.

Si AB n'est pas parallèle à XY, la surface qu'elle engendre est suivant le cas celle d'un cône (*fig.* 321) ou celle d'un tronc de cône (*fig.* 322).

Dans tous les cas, elle est mesurée (**402**) par l'expression $2\pi AB \times MM'$, en appelant M' la projection de M sur XY.

Dans le cas de la figure 321, les triangles ABB' et MOM' sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires et donnent

$$\frac{AB}{OM} = \frac{A'B'}{MM'} \text{ ou } AB \times MM' = A'B' \times OM.$$

La valeur de la surface considérée peut donc s'écrire $2\pi \times OM \times A'B'$, ce qui démontre le théorème, puisque $2\pi \times OM$ est la longueur de la circonférence de rayon OM.

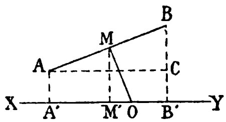


Fig. 322.

Dans le cas de la figure 322, menons AC parallèle à XY qui rencontre BB' en C. Les triangles ABC, MOM', sont semblables et donnent

$$\frac{AB}{OM} = \frac{AC}{MM'}.$$

Comme $AC = A'B'$, on en déduit comme plus haut $AB \times MM' = A'B' \times OM$, et la démonstration s'achève comme dans le cas précédent.

Théorème X

429. — L'aire engendrée par une ligne brisée régulière ABCD qui tourne autour d'un axe XY qu'elle ne traverse pas, et qui passe par son centre O, a pour mesure le produit de la projection $A'D'$ de cette ligne sur XY par la circonférence inscrite dans cette ligne (*fig.* 323).

L'aire considérée S est la somme des aires engendrées par les différents côtés AB, BC, CD de la ligne brisée. Si donc A', B', C', D' sont les projections des sommets A, B, C, D sur XY, et si E, F, G sont les milieux des

côtés AB, BC, CD, on aura, d'après le théorème précédent, et puisque la ligne donnée est régulière :

$$S = 2\pi OE \times A'B' + 2\pi OF \times B'C' + 2\pi OG \times C'D'.$$

Mais $OE = OF = OG = r$, en appelant r le rayon de la circonférence inscrite à la ligne brisée ; on a donc :

$$S = 2\pi r(A'B' + B'C' + C'D'),$$

ou

$$S = 2\pi r \times A'D'.$$

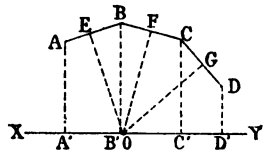


Fig. 323.

Mais $2\pi r$ est la longueur de la circonférence inscrite ; le théorème est donc démontré.

430. — Soit une sphère O engendrée par la rotation du demi-cercle ACB autour de son diamètre AB (*fig.* 324). La portion de la surface de la sphère engendrée par un arc CD de cette demi-circonférence est une *zone;* cette zone est limitée par deux cercles de la sphère dont les plans sont parallèles, et qui sont les bases de la zone.

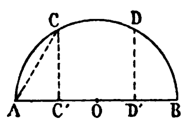


Fig. 324.

La projection C'D' de l'arc CD sur le diamètre AB est la *hauteur* de la zone.

Les arcs tels que AC et BD engendrent aussi des zones, à une seule base, qui reçoivent aussi le nom particulier de *calottes sphériques*.

La sphère tout entière est elle-même une zone qui a pour hauteur le diamètre AB.

Théorème XI

431. — L'aire d'une zone sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

Soit la zone engendrée par l'arc CD (*fig.* 325). Inscri-

vons dans cet arc une ligne brisée régulière CEFD, et construisons aussi la ligne brisée circonscrite correspondante (**231**) CGHKD. Si l'on fait tourner la figure autour de AB, la ligne CEFD engendre une surface s qui a pour valeur, d'après le théorème précédent, $2\pi a \times C'D'$ en appelant a l'apothème de cette ligne ; de même, la ligne CGHKD engendre une surface S qu'il est facile d'évaluer ; G' et K' étant les projections de G et K sur AB, et la ligne GHK étant régulière, et ayant pour apothème le rayon R de la sphère, on aura :

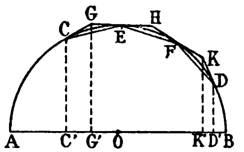


Fig. 325.

$$S = 2\pi R \times G'K' + \text{surf. } CG + \text{surf. } KD.$$

Enfin, si Z est l'aire de la zone considérée, on a évidemment :

$$s < Z < S.$$

Cela posé, doublons indéfiniment le nombre des côtés des lignes brisées considérées : a aura pour limite R ; $G'K'$ aura pour limite $C'D'$ et les surfaces engendrées par CG et KD tendront vers zéro, puisque les côtés CG et KD tendent eux-mêmes vers zéro sans s'éloigner indéfiniment ; par suite s et S auront une limite commune qui sera $2\pi R \times C'D'$. Comme Z est constamment comprise entre deux valeurs correspondantes de s et de S, elle a pour valeur la limite commune de ces quantités, c'est-à-dire $2\pi R \times C'D'$, c. q. f. d.

432. — Si l'on appelle h la hauteur d'une zone appartenant à une sphère de rayon R, et Z son aire, on a donc la formule :

$$Z = 2\pi R h.$$

On voit que dans une même sphère deux zones de même hauteur sont équivalentes.

Dans une calotte sphérique engendrée par un arc AC

(*fig.* 324), on a, comme l'on sait, $\overline{AC}^2 = AC' \times AB = 2Rh$, et par suite, on peut écrire :

$$Z = \pi\overline{AC}^2.$$

L'aire d'une calotte sphérique est donc égale à l'aire d'un cercle qui aurait pour rayon la corde de l'arc générateur.

THÉORÈME XII

433. — L'aire S d'une sphère est égale à quatre fois l'aire d'un grand cercle.

Il suffit, dans la formule précédente, de faire $h = 2R$, puisqu'une sphère est une zone de hauteur 2R. On obtient ainsi :

$$S = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2,$$

ce qui démontre le théorème, puisqu'un grand cercle a pour surface πR^2.

On peut encore écrire $S = \pi D^2$ en appelant D le diamètre de la sphère.

Corollaire. — L'aire d'une sphère est proportionnelle au carré de son rayon.

Si C est la circonférence d'un grand cercle, on peut écrire $C = 2\pi R$, et par suite :

$$S = \frac{C^2}{\pi}.$$

Exemple. — Calculer la surface de la terre.

On a : $C = 40000000^{m}$, et par suite $S = 509295818^{Kmq}$.

THÉORÈME XIII

434. — Le volume V engendré par un triangle ABC tournant autour d'un de ses côtés BC est égal au tiers de la surface S décrite par l'un des deux

autres côtés, AB par exemple, multipliée par la hauteur CH correspondante (*fig.* 326).

Suivant les cas, le volume V est la somme ou la différence des volumes des deux cônes engendrés par les triangles ABK, ACK, en appelant K la projection de A

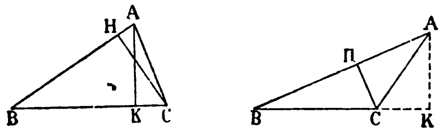


Fig. 326.

sur BC. Ces cônes ont respectivement pour volumes : $\frac{1}{3}\pi\overline{AK}^2 \times BK$ et $\frac{1}{3}\pi\overline{AK}^2 \times CK$; comme, suivant le cas, on a $BK + CK = BC$, ou $BK - CK = BC$, on a toujours :

$$V = \frac{1}{3}\overline{AK}^2 \times BC.$$

Mais $AK \times BC = AB \times CH$, car chacun des deux membres de cette égalité représente le double de la surface du triangle ABC ; on peut donc écrire :

$$V = \frac{1}{3}\pi AK \times AB \times CK.$$

Mais $\pi AK \times AB$ est l'aire S décrite par le côté AB, puisque cette aire est la surface latérale du cône ABK ; on a donc :

$$V = \frac{1}{3} S \times CH, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème XIV

435. — Le volume V engendré par un triangle ABC tournant autour d'un axe XY qui passe par un de ses sommets A et qui ne le traverse pas, est égal

au tiers de la surface S décrite par le côté BC opposé au sommet A, multipliée par la hauteur AH correspondante (*fig.* 327).

Si BC coupe XY en D, on a évidemment :

$$V = \text{vol. ABD} - \text{vol. ACD};$$

mais, d'après le théorème précédent, on a :

$$\text{Vol. ABD} = \frac{1}{3}\,\text{AH} \times \text{surf. BD},$$

$$\text{Vol. ACD} = \frac{1}{3}\,\text{AH} \times \text{surf. CD}.$$

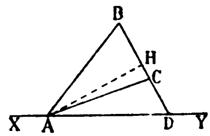


Fig. 327.

Donc

$$V = \frac{1}{3}\,\text{AH}\,(\text{surf. BD} - \text{surf. CD}),$$

et comme surf. BD — surf. CD = surf. BC = S, on a :

$$V = \frac{1}{3}\,S \times \text{AH}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si BC est parallèle à XY (*fig.* 328), soient B′ et C′ les projections de B et C sur XY ; on a, suivant les cas :

$$V = \text{vol. BCB'C'} - \text{vol. BAB'} \mp \text{vol. CAC'}.$$

D'ailleurs, le premier des volumes qui figurent au

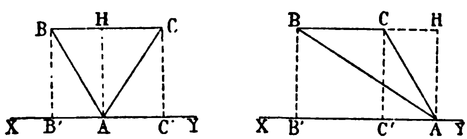


Fig. 328.

second membre est celui d'un cylindre; les deux autres sont les volumes de deux cônes, et l'on a par suite :

$$\text{Vol. BAB'} = \frac{1}{3}\,\pi\overline{\text{AH}}^2 \times \text{BH},$$

$$\text{Vol. CAC}' = \frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2 \times CH,$$

$$\text{Vol. BCB}'C' = \pi\overline{AH}^2 \times BC,$$

et comme, suivant les cas, on a :

$$BC = BH \pm CH,$$

on a toujours :

$$V = \pi\overline{AH}^2 \times BC - \frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2 \times BC,$$

$$= \frac{2}{3}\pi\overline{AH}^2 \times BC.$$

Mais ici, S est la surface latérale d'un cylindre et a pour valeur $2\pi AH \times BC$; donc il vient :

$$V = \frac{1}{3} S \times AH, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème XV

436. — Le volume V engendré par un secteur polygonal régulier OABCD qui tourne autour d'un axe XY qui ne le traverse pas et qui passe par son centre O, a pour mesure le tiers du produit de la surface S décrite par la ligne brisée qui lui sert de base, multipliée par l'apothème *a* de cette ligne brisée (*fig.* 329).

On a évidemment :

$$V = \text{vol. AOB} + \text{vol. BOC} + \text{vol. COD}.$$

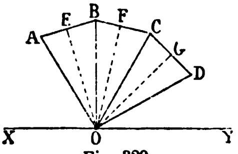


Fig. 329.

$$\text{Vol. AOB} = \frac{1}{3} OE \times \text{surf. AB},$$

$$\text{Vol. BOC} = \frac{1}{3} OF \times \text{surf. BC},$$

$$\text{Vol. COD} = \frac{1}{3} OG \times \text{surf. CD}.$$

Mais $OE = OF = OG = a$; on a donc :

$$V = \frac{1}{3} a(\text{surf. } AB + \text{surf. } BC + \text{surf. } CD) = \frac{1}{3} aS, \text{ c.q.f.d.}$$

437. — Soit une sphère O engendrée par la rotation du demi-cercle ACB autour de son diamètre AB (*fig.* 330), et un secteur circulaire COD appartenant à ce demi-cercle. Le volume engendré par ce secteur circulaire tournant autour de AB est un *secteur sphérique* appartenant à la sphère O. Il est limité d'une part par la zone décrite par l'arc CD et d'autre part par les surfaces latérales des cônes engendrés par les triangles COC′, DOD′, C′ et D′ désignant les projections de C et D sur AB ; la zone engendrée par l'arc CD est la *base* du secteur sphérique.

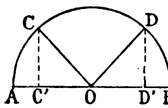


Fig. 330.

Si C et D viennent en A et B, le secteur sphérique correspondant devient la sphère tout entière.

Théorème XVI

438. — Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le tiers du produit de l'aire de la zone qui lui sert de base par le rayon de la sphère.

Soit le secteur sphérique engendré par la rotation du secteur circulaire COD autour du diamètre AB (*fig.* 331). Inscrivons dans l'arc CD une ligne brisée régulière CEFD, et construisons aussi la ligne brisée circonscrite correspondante CGHKD. Si l'on fait tourner la figure autour de AB, la ligne CEFD engendre une aire s, et le secteur polygonal régulier OCEFD engendre un volume u

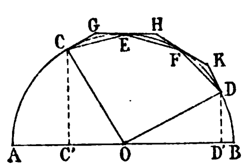


Fig. 331.

qui a pour mesure, d'après le théorème précédent, $\frac{1}{3} a \times s$, en appelant a l'apothème de la ligne CEFD. De même, la ligne CGHKD engendre une aire S, et le secteur polygonal circonscrit OCGHKD correspondant au secteur polygonal régulier inscrit OCEFD (**253**) engendre un volume U auquel on peut évidemment appliquer le théorème précédent, et qui a par suite pour mesure $\frac{1}{3} R \times S$, R, le rayon de la sphère, étant l'apothème de la ligne CGHKD.

Enfin, si V est le volume du secteur sphérique considéré, on a évidemment :

$$u < V < U.$$

Cela posé, doublons indéfiniment le nombre des côtés des lignes brisées considérées : a aura pour limite R, s et S auront pour limite l'aire Z de la zone engendrée par l'arc CD (**431**) et par suite u et U auront une limite commune qui sera $\frac{1}{3} R \times Z$. Comme V est constamment compris entre deux valeurs correspondantes de u et de U, V a pour valeur la limite commune de ces quantités, c'est-à-dire $\frac{1}{3} R \times Z$, c. q. f. d.

439. — Si h est la hauteur C'D' de la zone engendrée par l'arc CD, on a :

$$Z = 2\pi R \times h,$$

et par suite :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

On voit que, dans une même sphère, deux secteurs dont les bases ont des hauteurs égales sont équivalents.

Théorème XVII

440. — Le volume V d'une sphère a pour mesure le tiers du produit de sa surface S par son rayon R.

Il suffit de supposer dans le théorème précédent que le secteur COD devient le demi-cercle AOB; Z devient alors S, et on a :

$$V = \frac{1}{3} R \times S, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

441. — Comme :

$$S = 4\pi R^2,$$

on a :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 ;$$

donc : *le volume d'une sphère est proportionnel au cube de son rayon.*

Si D est le diamètre de la sphère, on peut encore écrire :

$$V = \frac{1}{6} \pi D^3.$$

Soit C la circonférence d'un grand cercle de la sphère; on a :

$$R = \frac{C}{2\pi}, \quad S = \frac{C^2}{\pi}, \quad V = \frac{C^3}{6\pi^2}.$$

Connaissant S, on aura :

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad C = \sqrt{S\pi}, \quad V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}}.$$

Connaissant V, on aura :

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}, \quad C = \sqrt[3]{6\pi^2 V}, \quad S = \sqrt[3]{36\pi V^2}.$$

Exemple. — Calculer le volume de la terre.

On a : $C = 40000^{Km}$; d'où :

$$V = \frac{64\,000\,000\,000\,000^{Kmc}}{6\pi^2} = 1\,081\,000\,000\,000^{Kmc}$$

à un milliard de kilomètres cubes près.

THÉORÈME XVIII

442. — Le volume V engendré par un segment de cercle CMD, tournant autour d'un diamètre AOB qui ne le traverse pas, est égal au sixième du volume d'un cylindre qui aurait pour rayon de base la corde CD du segment et pour hauteur la projection C′D′ de cette corde sur AB (*fig.* 332).

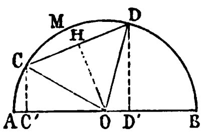


Fig. 332.

V est la différence des volumes engendrés par le secteur circulaire COD et le triangle COD tournant autour de AB. Si donc OH est perpendiculaire sur CD, on a d'après les théorèmes précédents :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \times C'D' - \frac{2}{3}\pi C'D' \times \overline{OH}^2,$$

en appelant R le rayon de la sphère, et remarquant que la surface engendrée par CD est $2\pi C'D' \times OH$.

Donc :

$$V = \frac{2}{3}\pi C'D'(R^2 - \overline{OH}^2) = \frac{2}{3}\pi C'D' \times \overline{CH}^2.$$

Comme $CH = \frac{CD}{2}$, il vient :

$$V = \frac{1}{6}\pi C'D' \times \overline{CD}^2, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — Le volume considéré dans l'énoncé reçoit quelquefois le nom d'*anneau* sphérique.

443. — On appelle *segment sphérique* la portion de sphère comprise entre deux plans parallèles, dont l'un peut être tangent à la sphère.

Les *bases* du segment sont les sections de la sphère par les deux plans qui limitent le segment ; la *hauteur* est la distance de ces deux plans.

Si l'un de ces plans est tangent à la sphère, le segment a une seule base, et est limité par une calotte sphérique.

Théorème XIX

Le volume d'un segment sphérique est égal au volume d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, augmenté de la demi-somme des volumes de deux cylindres ayant même hauteur que le segment, et pour bases respectives les deux bases du segment.

Soit (*fig.* 333) le segment ABA'B' de la sphère O, C et C' les centres des deux bases, de sorte que CC' est la hauteur du segment.

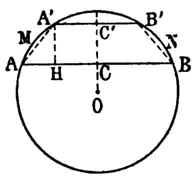


Fig. 333.

Le volume V du segment est la somme des volumes de l'anneau sphérique AMA'BNB' et du tronc de cône AA'BB'. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{AA'}^2 \times CC' + \frac{1}{3}\pi CC'(\overline{AC}^2 + \overline{A'C'}^2 + AC \times A'C').$$

Le triangle rectangle AA'H donne d'ailleurs :

$$\overline{AA'}^2 = \overline{CC'}^2 + (AC - A'C')^2,$$
$$= \overline{CC'}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{A'C'}^2 - 2AC \times A'C'.$$

Donc, il vient :

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{CC'}^3 + \frac{1}{6}\pi CC'\left(3\overline{AC}^2 + 3\overline{A'C'}^2\right)$$

$$=\frac{1}{6}\pi\overline{CC'}^3+\frac{1}{2}\pi CC'(\overline{AC}^2+\overline{A'C'}^2),$$

formule qui vérifie l'énoncé.

Si le segment sphérique est à une seule base (*fig.* 334), on a :

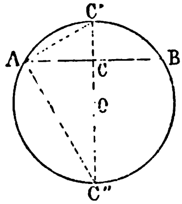


Fig. 334.

$$V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi h\overline{AC}^2$$

en appelant h sa hauteur CC'.

Mais on a $\overline{AC}^2=h(2R-h)$ dans le triangle rectangle C'AC'', en appelant R le rayon de la sphère, et par suite :

$$V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi h^2(2R-h),$$

$$=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

Exercices

1. — Calculer le rayon d'une sphère qui a 1^{mq} de surface.
Réponse. — $0^m,28$.

2. — Calculer le rayon et la surface d'une sphère qui a 1^{mc} de volume.
Réponse. — $R=0^m,620...$; $S=4^{mq},83...$

3. — Quel est le volume engendré par un parallélogramme tournant autour d'un de ses côtés?

4. — Le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe qui ne le traverse pas est égal au produit de sa surface par la circonférence qui aurait pour rayon la distance à l'axe du point de rencontre de ses médianes.

5. — L'aire engendrée par le périmètre d'un polygone régulier tournant autour d'un axe qui ne le traverse pas est égale à ce périmètre multiplié par la circonférence qui aurait pour rayon la distance à l'axe du centre de ce polygone.

6. — Le volume engendré par un polygone régulier tournant autour d'un axe qui ne le traverse pas est égal à sa surface multipliée par la circonférence qui aurait pour rayon la distance à l'axe du centre de ce polygone. Application au cas où le polygone tourne autour d'un de ses côtés ou autour de la tangente en l'un de ses sommets au cercle circonscrit. — Evaluer le vo-

lume considéré en fonction du rayon de ce cercle pour les polygones réguliers étudiés.

7. — Le rayon du soleil est 108,5 fois plus grand que celui de la terre. Quel est le rapport du volume du soleil à celui de la terre?

Réponse. — 1 277 289,125.

8. — Un fuseau est la portion de surface sphérique comprise entre deux demi-grands cercles. Montrer que deux fuseaux sont proportionnels à leurs angles, et que, par suite l'aire d'un fuseau de n degrés est $\frac{\pi R^2 n}{90}$.

9. — Un onglet est la portion de sphère comprise entre deux demi-plans limités à un même diamètre. Montrer que deux onglets sont proportionnels à leurs angles, et que par suite, le volume d'un onglet de n degrés est $\frac{\pi R^3 n}{270}$.

10. — Quelle est la surface totale d'un secteur sphérique?

11. — Calculer l'aire de la zone torride, sachant que les tropiques sont à une distance de 23°30′ de l'équateur.

12. — Soit une sphère de rayon R, un cône et un cylindre de hauteur R et de rayon de base R; quel est le rapport des volumes de ces trois corps?

13. — Quel est le rapport des surfaces totales des volumes d'une sphère et du cône équilatéral (c'est-à-dire engendré par la moitié d'un triangle équilatéral tournant autour de la hauteur) circonscrit?

14. — Quels sont les rapports des surfaces totales ou des volumes d'une sphère, du cylindre circonscrit et du cône équilatéral circonscrit?

15. — Inscrire dans une sphère un cône dont l'aire latérale soit égale à celle de la calotte sphérique qui a pour base la base du cône.

16. — Quelle est la surface et quel est le volume d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères.

17. — Quel est le volume d'un segment sphérique appartenant à une sphère de rayon R et limité par deux plans dont les distances au centre sont d et d'.

18. — Résoudre un triangle, connaissant les volumes qu'il engendre en tournant successivement autour de ses trois côtés.

19. — Couper une sphère par un plan tel que l'aire de la section soit dans un rapport donné avec la différence des aires des deux calottes sphériques déterminées par le plan.

20. — Inscrire dans une sphère un cylindre dont l'aire latérale ou totale soit à l'aire de la sphère dans un rapport donné.

APPENDICE

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE SUR LE TERRAIN

§ 1er. — Arpentage.

444. — *Arpenter un terrain, c'est en mesurer la surface.* Nous supposerons d'abord le terrain à arpenter *horizontal,* c'est-à-dire situé dans un même plan perpendiculaire à la direction du fil à plomb.

Problème I

445. — Mener une droite sur le terrain.

On trace une droite sur le terrain en marquant, à l'aide de *jalons,* un certain nombre de points à cette droite.

Un jalon est une tige de bois d'environ $1^m,50$ de longueur, terminée, d'une part, par une pointe destinée à être enfoncée dans le sol, de l'autre par un *voyant* ou plaque carrée en bois, destiné à servir de mire.

Les jalons doivent être plantés verticalement à des distances telles les unes des autres que l'on puisse, sans craindre de déviation, aller en ligne droite de l'un à l'autre.

La ligne droite à déterminer ou l'*alignement à tracer* est toujours déterminée par deux points donnés où l'on plante des jalons. Pour planter les autres, on s'appuiera sur le principe suivant : *Trois jalons* A, B, C *sont en*

ligne droite, si, se plaçant à quelques pas derrière le

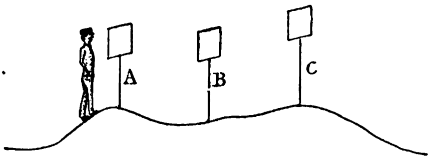


Fig. 335.

jalon A *de façon à ce que ce jalon cache le jalon* B, *il cache aussi le jalon* C (*fig.* 335).

Problème II

446. — Mesurer une droite.

On se sert de la *chaîne d'arpenteur;* cette chaîne est longue de dix mètres, et se compose de cinquante chaînons en fer reliés entre eux par des anneaux ; elle est terminée par deux poignées comprises dans la longueur de la chaîne. La chaîne est accompagnée de dix *fiches* en fer, longues de $0^m,40$ environ, et terminées en pointe.

Pour mesurer une longueur AB (*fig.* 336), on opère de la façon suivante :

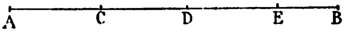


Fig. 336.

L'arpenteur place en A une poignée de la chaîne et l'y maintient. Son aide marche suivant la ligne AB, tend la chaîne et plante une fiche à son extrémité C.

L'arpenteur et son aide s'avancent suivant AB; en C, l'arpenteur passe la poignée dans la fiche; l'aide tend la chaîne et plante une fiche à son extrémité D.

L'arpenteur prend la fiche C et continue à s'avancer suivant AB en même temps que son aide; ils arrivent en D et E où ils opèrent comme plus haut en C et D. Quand l'arpenteur est en E, l'aide est arrivé en B, extrémité de la ligne à mesurer; il tend la chaîne; l'arpen-

teur prend la fiche E et évalue la portion de chaîne EB, soit $4^m,75$.

L'arpenteur ayant trois fiches à la main a parcouru trois fois dix mètres de A en E, c'est-à-dire 30 mètres; la longueur totale AB est donc $34^m,75$.

Problème III

447. — Mener par un point une perpendiculaire à une droite.

Cette opération se fait à l'aide de l'*équerre d'arpenteur*. Cet instrument est une boîte en laiton octogonale, vissée à l'extrémité d'un bâton de $1^m,50$ environ, qui peut s'enfoncer verticalement dans le sol (*fig.* 337).

Fig. 337.

Les faces de l'équerre sont percées chacune d'une fenêtre ou *pinnule* traversée verticalement par un fil fin, et la ligne de visée déterminée par les fils de deux fenêtres parallèles est perpendiculaire à la ligne de visée déterminée par les fils de deux fenêtres perpendiculaires aux premières.

Proposons-nous d'abord de mener une perpendiculaire à une droite AB par un point C de cette droite. On placera l'équerre en ce point et on mettra l'une des lignes de visée dans la direction de la droite; la ligne de visée perpendiculaire à celle-là déterminera la perpendiculaire cherchée : il suffira de planter un jalon dans cette direction.

S'il s'agit de mener une perpendiculaire à une droite par un point extérieur, on déterminera à peu près le pied de cette perpendiculaire à la simple vue, et par tâtonnements successifs, qu'abrège l'habitude, on cherchera la position exacte du point de la droite, tel que la perpendi-

culaire qu'on peut lui mener en ce point aille passer par le point donné.

448. — Pour mesurer la surface S d'un terrain qui a la forme d'un triangle, on en mesurera la base B et la hauteur H déterminée à l'aide de l'équerre; on aura alors :

$$S = \frac{BH}{2}.$$

On peut aussi mesurer les trois côtés a, b, c; et posant $a + b + c = 2p$, on aura :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pour mesurer la surface S d'un terrain qui a la forme d'un quadrilatère, on le décomposera en deux triangles par une diagonale et on mesurera ces deux triangles comme nous venons de le voir. Le procédé le plus simple consistera à prendre la diagonale pour base commune des deux triangles, à mesurer cette diagonale B, et les distances H et H′ à cette diagonale des deux autres sommets du quadrilatère, ce qui donne :

$$S = \frac{B(H + H')}{2}.$$

Pour mesurer la surface S d'un terrain qui a la forme d'un polygone quelconque, on opérera comme nous l'avons dit aux nos **247** et **248** : toutes les opérations indiquées sont facilement réalisables, quelle que soit la méthode employée.

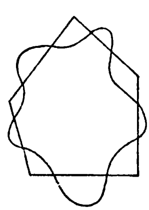


Fig. 338.

449. — Pour mesurer la surface d'un terrain limité par une courbe quelconque C (*fig.* 338), on transformera l'aire enveloppée par cette courbe en un polygone équivalent, à simple vue : on obtiendra ainsi, en général, une approximation suffisante. On pourra ainsi inscrire ou circonscrire à la courbe C un polygone dont les côtés soient assez

petits pour que l'erreur commise soit négligeable. On opérera, par exemple, de la façon suivante : soit (*fig.* 339) une ligne AB traversant la courbe C dans sa plus grande largeur; partageons cette ligne en un certain nombre de parties aux points C, D, E,..; les perpendiculaires menées par ces points à AB rencontrent la courbe C aux points C′, C″; D′, D″; E′, E″...; on mesurera les longueurs C′C″, D′D″, E′E″,... et l'on aura, en appelant S l'aire cherchée remplacée par celle du polygone AC′D′E′... H... E″D″C″ :

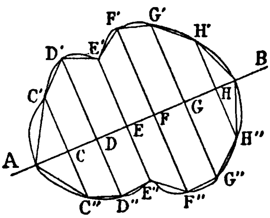


Fig. 339.

$$S = \frac{1}{2} AC \times C'C'' + \frac{1}{2} CD \times (C'C'' + D'D'')$$

$$+ \frac{1}{2} DE \times (D'D'' + E'E'') + \ldots..$$

Si, en particulier, on choisit les longueurs AC, CD, DE,... égales entre elles, on aura :

$$S = AC \times (C'C'' + D'D'' + E'E'' + \ldots..)$$

Pour nous rendre compte de l'approximation de ce procédé, appliquons-le à déterminer la surface d'un cercle de 50 mètres de rayon (*fig.* 340). Partageons le diamètre en 10 parties égales, dont chacune aura 10 mètres.

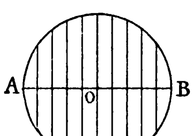


Fig. 340.

On aura évidemment, d'après les propriétés du cercle, en mètres carrés :

$$S = 20(50 + 2\sqrt{\overline{50}^2 - \overline{10}^2} + 2\sqrt{\overline{50}^2 - \overline{20}^2} + 2\sqrt{\overline{50}^2 - \overline{30}^2}$$

$$+ 2\sqrt{\overline{50}^2 - \overline{40}^2})$$

$$= 40[25 + 49,0 + 45,8 + 40 + 30] = 7572.$$

Le résultat exact est :

$$\overline{50}^2 \times \pi = 7854.$$

Si l'on avait partagé le diamètre en 20 parties égales, on aurait trouvé $S = 7760$.

Remarquons d'ailleurs que, dans le cas qui nous occupe, il n'y a pas compensation entre les diverses erreurs commises, la circonférence étant une courbe convexe.

450. — Pour mesurer la surface d'un terrain dans lequel on ne peut pénétrer, tel qu'un marais M (*fig.* 341), on l'enfermera dans une figure qu'on sache mesurer facilement, telle qu'un rectangle; on mesurera l'aire de ce rectangle et aussi celle de la portion de terrain comprise entre ce rectangle et le marais d'après les procédés indiqués plus haut. La différence entre ces deux aires sera l'aire cherchée.

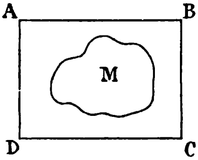


Fig. 341.

451. — Supposons maintenant que le terrain dont on doit mesurer la surface soit, non pas horizontal, mais situé dans un plan incliné sur l'horizon. On procédera alors comme s'il s'agissait d'un terrain horizontal, en mesurant les longueurs sur le sol, et en se servant, pour mener des perpendiculaires, de l'équerre d'arpenteur, mais en ayant soin de planter l'équerre perpendiculairement au sol : on s'assurera que cette condition est réalisée, en vérifiant que le bâton qui soutient l'équerre est perpendiculaire à deux droites quelconques tracées sur le sol et passant par son pied.

452. — Le plus souvent, lorsque l'on se trouve en face d'un terrain qui est dans un plan incliné ou, plus généralement, qui affecte un relief quelconque, on se propose de chercher la surface de sa projection horizontale.

On procédera, pour résoudre cette question, comme nous l'avons indiqué lorsqu'il s'agit d'un terrain horizontal : mais il faudra : 1° savoir mesurer la distance des projections horizontales de deux points; 2° étant donnés

une ligne projetée suivant une droite[1] et un point, savoir construire et mesurer la perpendiculaire menée à la projection horizontale de cette ligne par la projection horizontale de ce point.

Le premier problème se résout facilement. Soit à mesurer la distance des projections horizontales A′B′ de deux points A et B, et supposons qu'on aille du point A au point B en descendant (*fig.* 342). On fera comme lorsque la longueur AB est horizontale, mais en ayant soin de toujours tendre la chaîne horizontalement. On ira ainsi de A en C, la chaîne étant tendue horizontalement en AC et en C, on laissera tomber verticalement dans le sol une fiche plombée; puis on ira de C en D, la chaîne étant tendue horizontalement en CD′ et ainsi de suite. Il est clair que la longueur ainsi mesurée est la distance A′B′ des projections horizontales des points A et B.

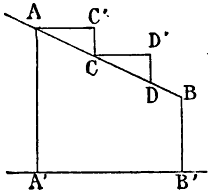


Fig. 342.

Le second problème se résout tout aussi facilement. Soit une ligne AB se projetant horizontalement suivant une droite et un point C de cette ligne; fixons au point C l'équerre d'arpenteur *verticalement*, et plaçons l'une des lignes de visée dans la direction de la ligne AB; la ligne de visée perpendiculaire à celle-là déterminera évidemment, sur le terrain, la ligne qui se projette sur le plan horizontal suivant une perpendiculaire à la projection de AB; il suffira de jalonner cette ligne pour pouvoir s'en servir et mesurer, comme précédemment, telle portion qu'on voudra de sa projection horizontale.

Si le point C était extérieur à la ligne AB, on opérerait comme dans le cas d'un terrain horizontal, en appliquant ce que nous venons de dire.

1. Sur le terrain de relief quelconque, il n'y a pas, en général, de lignes droites : mais la ligne que l'on jalonne en traçant un alignement comme dans le cas d'un terrain horizontal, se projette évidemment suivant une ligne droite.

§ 2. — Levé de plans.

453. — Le plan d'un terrain est une figure égale ou semblable à sa projection horizontale.

Pour construire un plan, on dresse d'abord un croquis à main levée sur lequel on inscrit les différents nombres que l'on obtient en mesurant directement sur le terrain les éléments nécessaires pour l'exécution du plan; ensuite on *rapporte le plan*, c'est-à-dire que l'on construit, sur le papier, une figure semblable à la projection horizontale du terrain, à l'aide des données fournies par le croquis.

454. — Pour exécuter cette seconde opération, il faudra construire des polygones semblables à des polygones donnés, ce que nous avons appris à faire au livre III; en particulier, il faudra réduire les diverses longueurs mesurées sur le terrain dans un rapport donné, ce qui se fait à l'aide d'une *échelle de réduction.*

Si ces longueurs sont réduites au centième, ou au dix-millième, etc., on dit que le plan est à l'*échelle* de $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$, etc.

Si $\frac{1}{n}$ est l'échelle d'un plan, une longueur A mesurée sur le terrain devient sur le papier $a = \frac{A}{n}$; inversement, une longueur a mesurée sur le plan représente sur le terrain une longueur $A = an$.

Si le nombre n est une puissance de 10, la réduction se fait très simplement; si, par exemple, on a $n = 1000$, une longueur de A mètres sur le terrain est représentée sur le plan par une longueur de A millimètres, et réciproquement. La réduction se fera donc très aisément à l'aide du double décimètre.

455. — Généralement, quelle que soit l'échelle du plan, on remplace le calcul par l'usage du compas pour effec-

tuer la réduction, en traçant dans un coin ou au bas du plan une *échelle* construite comme nous allons le dire.

Soit AB la longueur qui, sur le plan, représente une longueur donnée sur le terrain, par exemple, un hectomètre (*fig.* 343); à la suite de AB, on porte dix longueurs

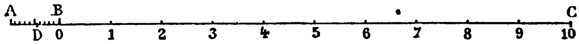


Fig. 343.

égales à AB de B en C, et on numérote les points de division, et, en outre, on divise AB en dix parties égales. (La longueur AB est choisie de telle façon que son dixième soit appréciable sans erreur sur le plan.)

Cela étant, soit à réduire une longueur de 547^m; mettant l'une des pointes du compas au point de division 5, on mettra l'autre au point D situé sur AB après la quatrième division, à partir de B, mais avant la cinquième et plus près de celle-ci, à peu près aux sept dixièmes de leur intervalle : la longueur ainsi prise, comprenant cinq grandes divisions et plus de quatre petites, représentera sur le plan une longueur de plus de 540^m, et qui, grâce aux précautions prises, sera très voisine de 547^m; à l'échelle donnée, il est d'ailleurs impossible d'apprécier exactement une longueur moindre que dix mètres.

Pour trouver la longueur représentée sur le terrain par une longueur prise sur le plan, on fera l'opération inverse, en cherchant le plus grand nombre de fois que la longueur donnée contient une grande division, et ensuite le plus grand nombre de fois que le reste contient une petite division.

456. — On emploie aussi très fréquemment une échelle plus compliquée que la précédente et appelée *échelle décimale*, la précédente recevant le nom d'*échelle simple*

Traçons onze parallèles équidistantes, de distance d'ailleurs arbitraire, numérotées de 0 à 10 (*fig.* 344), et limitées à gauche par une perpendiculaire commune. A l'aide d'autres perpendiculaires communes, portons sur ces parallèles des longueurs égales à celle qui, sur le plan,

représente une distance dont on veut pouvoir apprécier le centième, 100^{m}, par exemple, si on veut apprécier le mètre, et numérotons ces nouvelles perpendiculaires haut et bas de 0 à 10.

Divisons la première partie des parallèles extrêmes en dix parties égales, et numérotons les points de division sur la parallèle supérieure de 0 à 10, en sens inverse du numérotage des points de division des perpendiculaires.

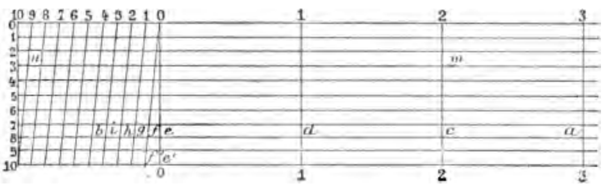


Fig. 344.

Enfin, joignons l'extrémité inférieure de la perpendiculaire limite au point de division 9 ainsi obtenu sur la première partie de la parallèle supérieure ; de même, joignons le point de division de la première partie de la parallèle inférieure le plus voisin de l'extrémité de la perpendiculaire limite au point de division 8 de la première partie de la parallèle supérieure, et ainsi de suite. On obtient ainsi dix droites, évidemment parallèles entre elles et obliques sur les premières parallèles, et la construction de l'échelle est terminée.

Expliquons maintenant son usage. Soit à réduire une longueur de 347^{m} : Mettons une pointe de compas sur la parallèle 7, indiquée par le chiffre des unités à son intersection avec la perpendiculaire 3 indiquée par le chiffre des centaines, en *a;* et l'autre pointe du compas sur la même parallèle à son intersection avec l'oblique 4 indiquée par le chiffre des dizaines, en *b* : la longueur *ab* est celle qui, sur le plan, représente la longueur donnée 347^{m}. En effet, elle contient les trois divisions *ac*, *cd*, *de* qui valent chacune 100^{m}; en outre, les quatre divisions *fg*, *gh*, *hi*, *ib* qui valent chacune 10^{m}, car elles sont égales

chacune au dixième de la première partie de la première parallèle ; enfin, la division *ef*, qui, d'après les propriétés des triangles semblables, étant située sur la parallèle 7, est égale aux sept dixièmes de *e'f'*, c'est-à-dire de 10^m, et par suite vaut 7^m.

Pour trouver la longueur représentée sur le terrain par une longueur prise sur le plan, on fera l'opération inverse : si la longueur donnée se place, par exemple, en *mn*, on en déduira immédiatement qu'elle représente sur le terrain une distance de 292 mètres.

L'avantage de l'échelle décimale sur l'échelle simple est évident : à dimensions égales, la première permet d'apprécier exactement une longueur qu'on ne peut apprécier qu'à vue en se servant de la première.

457. — Arrivons maintenant au détail des opérations à faire pour dresser le croquis du plan à construire, c'est-à-dire pour *lever le plan* sur le terrain.

On relève la position des points remarquables du terrain : ceux-ci sont les sommets d'un polygone qu'on appelle polygone *topographique;* les points secondaires sont rattachés par des triangles au polygone topographique ; les détails sont ensuite placés à vue sur le plan avec une exactitude suffisante.

Les courbes sont remplacées par des polygones inscrits ou circonscrits de côtés suffisamment petits, ainsi que nous avons déjà eu occasion de le dire, de sorte que, finalement, on est toujours ramené à lever le plan d'un polygone.

On peut employer à cet effet plusieurs procédés différents que nous allons décrire successivement.

458. **Levé au mètre.** — Pour pouvoir employer ce procédé, il faut que le terrain dont il s'agit de faire le plan soit de dimensions restreintes, et facile à parcourir et à mesurer.

Soit à lever le plan du polygone ABCDEF (*fig*. 345). On le décompose en triangles ABC, ACF, CFD, DEF dont on mesure à la chaîne les côtés ; et on a tous les éléments nécessaires pour rapporter ensuite le plan.

Il est bien entendu, et cela sera dit une fois pour toutes, que ce sont les distances des projections horizontales des différents points A, B, C, D, E, F que l'on mesure, comme nous l'avons indiqué plus haut (452).

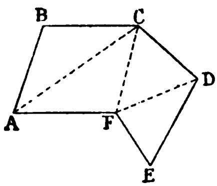


Fig. 345.

459. Levé à l'équerre d'arpenteur. — Soit à lever le plan du polygone ABCDEFG (*fig.* 346). Menons une droite quelconque XY, traversant de préférence le polygone dans sa plus grande largeur, et même passant par un ou deux sommets, s'il est possible. On mènera des perpendiculaires sur cette droite par les différents sommets du polygone; on mesurera ces perpendiculaires et les distances successives de leurs pieds sur XY, et l'on aura tous les éléments nécessaires pour rapporter ensuite le plan. Ce procédé est rapide; il est encore avantageux parce qu'il fournit toutes les données nécessaires pour le calcul de la surface du terrain (448).

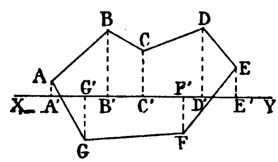


Fig. 346.

Il est bien entendu, comme précédemment, que c'est en projection horizontale que l'on opère, ainsi que nous avons appris à le faire (452).

460. Levé au graphomètre. — Le *graphomètre* (*fig.* 347) est un instrument destiné à mesurer les angles en degrés et minutes. Il se compose essentiellement d'un demi-cercle en cuivre divisé comme un rapporteur, et appelé *limbe;* ce limbe est monté sur un pied à trois branches, et peut prendre une position quelconque. Il porte deux alidades à pinnules (une alidade est une règle plate terminée par deux plaques perpendiculaires ou pinnules percées chacune d'une fenêtre traversée d'un fil fin); l'une de ces alidades est fixe et sa ligne de visée ou *ligne de foi* coïncide avec la ligne 0° — 180° du limbe; l'autre

est mobile et sa ligne de foi passe par le centre du limbe. Si l'on vise un objet A avec l'alidade fixe, et que, une fois le graphomètre fixé dans cette position, on vise un autre objet B avec l'alidade mobile, il suffira de lire sur le limbe l'angle indiqué par cette alidade pour obtenir l'angle des

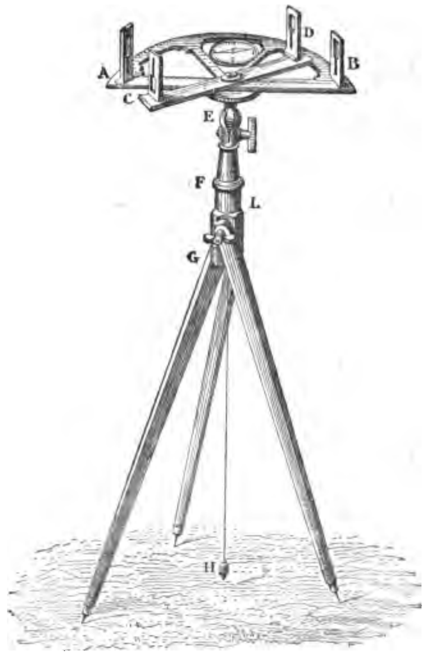


Fig. 347.

directions qui vont du centre du limbe aux deux objets A et B.

Le plan du limbe d'un graphomètre pouvant prendre une position quelconque, on peut mesurer avec cet instrument un angle situé dans un plan quelconque. Si l'on maintient le plan du limbe horizontal, ce dont on s'assurera avec un niveau à bulle d'air, et que l'on vise avec les

alidades dans les plans verticaux de deux objets A et B, l'angle indiqué par l'instrument sera la projection horizontale de l'angle AOB, O désignant le centre du limbe. On peut donc mesurer aussi facilement avec le graphomètre un angle que sa projection horizontale : il est clair que, en levant un plan, ce seront toujours les projections horizontales des angles qu'il faudra mesurer, et non les angles eux-mêmes.

On peut se servir du graphomètre pour lever un plan de deux façons distinctes :

1° *Méthode par cheminement.* — On mesure tous les côtés et tous les angles du polygone à relever, les premiers avec la chaîne, le second avec le graphomètre. Les points secondaires tels que M sont rattachés au polygone topographique ABCDEFG (*fig.* 348) par la mesure des deux angles MAB et MBA, par exemple.

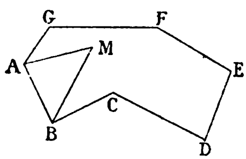


Fig. 348.

Cette méthode est avantageuse lorsque l'on peut facilement parcourir le périmètre du polygone topographique, et qu'il est difficile de pénétrer dans son intérieur. Dans le cas contraire, on emploie la seconde méthode que nous allons maintenant indiquer.

2° *Méthode par intersections.* — Choisissons dans l'intérieur du polygone à relever ABCDEFGH deux points K et L d'où l'on puisse voir facilement tous les sommets (*fig.* 349).

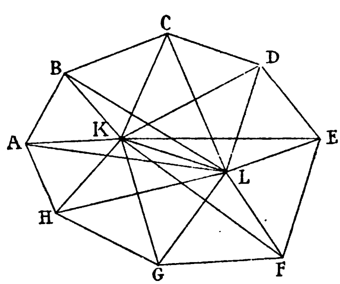


Fig. 349.

On mesure la distance KL et les angles formés en chacun de ces points par les droites qui les joignent aux différents sommets du polygone. Il est clair que l'on a ainsi tous les éléments né-

cessaires pour rapporter le plan : chaque sommet tel que A est déterminé par l'intersection de deux droites KA et LA.

On mesurera facilement les divers angles de sommet K, par exemple, en dirigeant l'alidade fixe suivant KL, et l'alidade mobile successivement dans les directions KA, KB, KC, etc.

461. **Levé à la planchette.** — Ce procédé permet,

Fig. 350.

comme nous allons le voir, d'obtenir immédiatement le plan du terrain à relever : mais il n'est pas susceptible d'une grande précision.

La *planchette* est une planche à dessiner bien dressée, supportée par un pied à trois branches ; on peut fixer son plan horizontalement, et on peut ensuite la faire tourner autour d'une verticale ou la fixer complètement (*fig.* 350).

La planchette porte une feuille de papier sur laquelle on peut tracer les lignes avec une règle alidade en cuivre portant deux pinnules, le bord de la règle étant situé dans le plan de visée de l'alidade.

On voit qu'on peut se servir de cet appareil comme d'un graphomètre : mais au lieu de mesurer les angles on les trace immédiatement sur le papier; il suffit de placer la règle de façon à viser successivement les deux objets A et B dont on veut déterminer l'angle vu du point de stationnement O : mais il faudra avoir soin de faire passer le bord de la règle par le point qui, sur le papier, représente le point O.

De ce qui précède, il résulte immédiatement que, pour lever un plan avec la planchette, on pourra employer les mêmes méthodes qu'avec le graphomètre : on procédera soit par cheminement, soit par intersections.

Les distances mesurées seront rapportées immédiatement sur le plan à l'aide d'une échelle.

§ 3. — Nivellement.

462. — Faire le nivellement d'un terrain, c'est déterminer les différences de hauteur ou de niveau d'un certain nombre de ses points pris deux à deux au-dessus d'un plan horizontal fixe quelconque.

Il suffit donc de savoir faire un nivellement entre deux

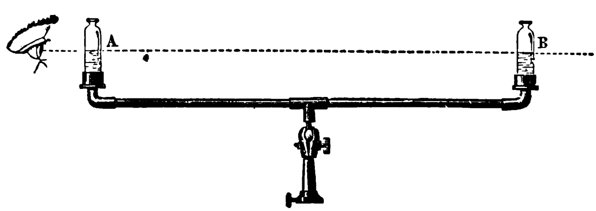


Fig. 351.

points. On se sert pour effectuer cette opération d'un *niveau d'eau* et d'une *mire*.

Le niveau d'eau (*fig.* 351) se compose d'un tube en fer-blanc de $1^m,40$ environ, terminé par deux fioles en verre de 5^{cm} de diamètre environ; ce tube est porté par un pied à trois branches, et peut être rendu horizontal; on peut ensuite le faire tourner autour d'une verticale. Le tube contient de l'eau colorée, de façon que les fioles soient remplies à peu près aux deux tiers. D'après un principe connu de physique, les surfaces du liquide dans les deux fioles sont dans un même plan horizontal, et fournissent par suite une ligne de visée horizontale pour un observateur placé à quelque distance derrière l'instrument.

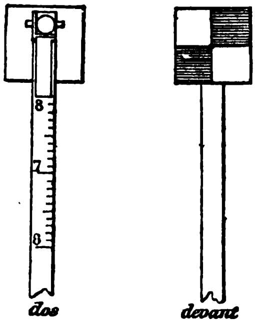


Fig. 352.

La mire (*fig.* 352) est une règle en bois divisée en centimètres, que l'on pose verticalement sur le sol. Elle porte un *voyant* ou plaque de bois divisée en quatre rectangles peints en deux couleurs; la ligne de séparation horizontale de ces rectangles est la *ligne de foi* de la mire. Le voyant peut glisser et se fixer le long de la mire; une lecture donne immédiatement en centimètres et en millimètres la hauteur de la ligne de foi au-dessus du point du sol sur lequel repose la mire.

463. — Pour faire un *nivellement simple* entre deux points C et D, on installe le niveau à peu près à égale distance de ces deux points, et de façon que sa ligne de visée passe au-dessus des deux points. Le porte-mire se place en C et déplace le voyant jusqu'à ce que l'opérateur voie la ligne de visée du niveau passer par la ligne de foi de la mire; soit h la hauteur indiquée par la mire. La même opération se fait en D, soit h' la hauteur nouvelle indiquée par la mire. Si h' est inférieur à h, le point D est au-dessus du point C, et la différence de niveau de ces deux points est évidemment $h - h'$ (*fig.* 353).

464. — Si le terrain ne permet pas de faire un nivel-

lement simple entre deux points A et B, ou si ces points sont trop éloignés l'un de l'autre, on fait un *nivellement*

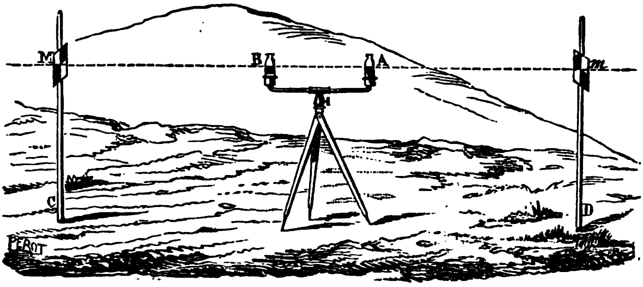


Fig. 353.

composé, en choisissant des points intermédiaires C, D, E, et on fait des nivellements simples successifs entre

A et C, C et D, D et E, E et B.

Chaque nivellement simple se compose de deux coups de niveau, un *coup avant* dans la direction de A vers B du déplacement du porte-mire, un *coup arrière* dans le

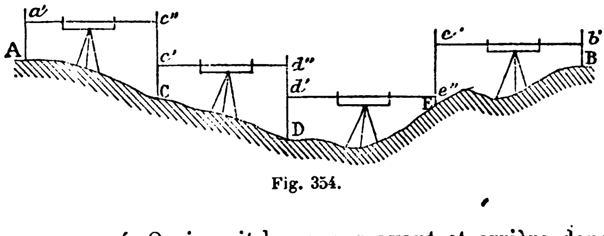


Fig. 354.

sens opposé. On inscrit les coups avant et arrière dans un tableau appelé *registre des nivellements* et disposé comme il suit :

REGISTRE DES NIVELLEMENTS

Points nivelés.	Coups arrière.	Coups avant.
A	$1^m,05$	»
C	$0^m,83$	$2^m,04$
D	$1^m,66$	$2^m,47$
E	$1^m,15$	$0^m,43$
B	»	$0^m,20$
Sommes. . . .	$4^m,69$	$5^m,14$
Différence. . .	»	$0^m,45$

Soit s la somme des coups arrière, S la somme des coups avant ; soit $S > s$, la différence $S - s$ est la différence de niveau des deux points A et B et c'est le point de départ A qui est le plus élevé. Si au contraire s est supérieur à S, $s - S$ est la différence de niveau des deux points, et c'est le point d'arrivée B qui est le plus élevé.

Ces règles se justifient immédiatement ; en effet, sur la figure, on a :

$$s = Aa' + Cc' + Dd' + Ee'$$
$$S = Cc'' + Dd'' + Ee'' + Bb'',$$

et par suite :

$$S - s = c'c'' + d'd'' - e'e'' + Bb'' - Aa'.$$

Cette somme est évidemment la différence de niveau des points A et B.

§ 4. — Cartes topographiques.

465. — Quand on a levé le plan d'un terrain, c'est-à-dire quand on a construit une figure semblable à la projection horizontale de ce terrain, on n'a pas encore obtenu une représentation complète de ce terrain : son *relief* reste, en effet, complètement inconnu.

Pour donner une idée nette de ce relief, on fait le nivellement du terrain, et on inscrit sur le plan, à côté de chacun des points relevés, la *cote* de ce point, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus d'un plan de projection, arbitrairement choisi, et appelé *plan de comparaison*. En général,

on prend pour plan de comparaison la surface moyenne de la mer idéalement prolongée sous les continents ; la cote d'un point est alors sa hauteur au-dessus du niveau de la mer, ou simplement son *altitude*. Ajoutons que l'altitude d'un point quelconque, que nous savons déterminer par une suite de nivellements, peut aussi être obtenue directement à l'aide du baromètre.

Le plan du terrain complété, ainsi que nous venons de le dire, par l'inscription de la cote de chaque point, est appelé *plan coté*.

466. — La simple inspection d'un plan coté permet de connaître immédiatement la différence de niveau de deux des points qui y sont marqués.

A l'aide du plan coté, on peut aussi trouver facilement le *profil* du terrain dans une certaine direction, c'est-à-dire la forme de la section du terrain par un certain plan vertical. Soit, en effet, X'X la trace de ce plan sur le plan horizontal de projection (*fig.* 355) ; les points A, B, C, D, E, F, G projetés sur X'X ont des cotes respectivement égales à 2, 4, 5, 7, 6, 3, 1 mètres.

Si nous menons des perpendiculaires à X'X par les divers points A, B, ... et que nous prenions sur ces perpendiculaires des longueurs proportionnelles aux cotes des points A, B, ..., nous obtenons une série de points A', B', C', ..., G'.

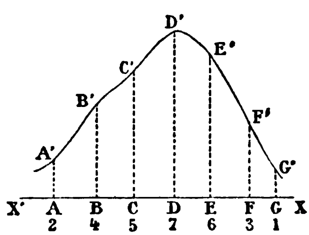


Fig. 355.

Si l'on joint ces points par un trait continu, il est clair que l'on obtient une courbe qui représente le profil du terrain dans la direction X'X, et cela avec d'autant plus d'exactitude que les points A, B, C, ... sont plus rapprochés les uns des autres.

467. — On emploie le plus souvent un autre procédé que celui que nous venons de décrire, pour indiquer sur le plan le relief du terrain.

On trace sur le plan des *courbes de niveau*, c'est-à-dire les intersections de la surface du terrain par des plans horizontaux, ou encore, par conséquent, les lignes lieux géométriques des points du terrain qui ont une même cote.

On obtient ainsi une *carte topographique*.

En général, on représente les courbes de niveau qui correspondent à des cotes rondes équidistantes, par exemple, 5^m, 15^m, 20^m,.....

La différence constante entre deux cotes consécutives s'appelle l'*équidistance*.

Sur les cartes de l'état-major français, à l'échelle de $\frac{1}{40000}$, l'équidistance est de 20^m; elle est de 40^m sur les cartes à l'échelle de $\frac{1}{80000}$.

Une carte topographique permet de construire immédiatement le profil du terrain dans une direction quelconque. La trace du plan vertical qui contient la coupe rencontre, en effet, les courbes de niveau en un certain nombre de points dont on a immédiatement les cotes; il ne reste plus qu'à appliquer la construction du numéro précédent.

468. — La simple inspection d'une carte topographique permet de se rendre compte très exactement de la forme d'un terrain, d'après la disposition de ses lignes de niveau.

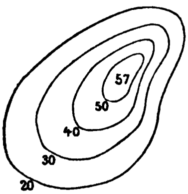


Fig. 356.

D'abord il est clair, en vertu de ce qui a été dit plus haut, que la pente d'un terrain est d'autant plus rapide que les lignes de niveau sont plus rapprochées les unes des autres.

Une *éminence* du terrain est représentée par une figure telle que la figure 356. Le point le plus élevé, ou *sommet*, est marqué et coté spécialement.

Une *ligne de faîte* ou *de partage des eaux* est la ligne des points les plus élevés entre deux vallées; un *thalweg* (mot allemand, qui signifie route de la vallée) est la ligne des points les plus bas d'une vallée.

Dans la figure 357, les lignes FF′, LCDA sont des lignes de faîte; les lignes TOT′, TOT″ sont des thalwegs.

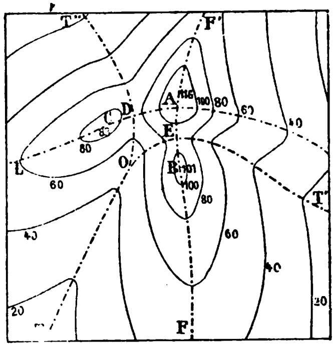


Fig. 357.

Les caractères auxquels on reconnaît sur la carte ces diverses lignes sans qu'elles soient tracées sont évidents d'après leur définition.

Le point de rencontre d'une ligne de faîte et d'un thalweg est un *col*. Les points D et E de la figure 357 sont des cols; ils sont cotés spécialement, de même que les sommets A, B, C.

469. — En général, on supprime les courbes de niveau sur les cartes, et on les remplace par des *hachures*. Les hachures sont des perpendiculaires ou *normales* aux courbes de niveau consécutives, tracées par séries entre ces courbes deux à deux. On laisse, par convention, entre deux hachures consécutives un intervalle égal au quart de leur longueur, et on grossit un peu les hachures les plus courtes. On s'arrange de façon que les diverses séries de hachures aient leurs extrémités distinctes.

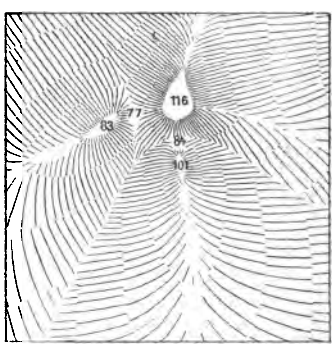


Fig. 358.

Les hachures ne sont autre chose que les projections sur la carte des lignes de plus grande pente du terrain.

La figure 358 est la figure 357 dessinée avec des hachures. On reconnaît tout de suite que les lignes de ni-

veau, quoique non tracées, sont visibles, comme séparant les diverses séries de hachures.

La pente du terrain est d'autant plus rapide, avons-nous dit, que les courbes de niveau sont plus rapprochées, et par suite que les hachures sont elles-mêmes plus rapprochées et plus grosses, et produisent par conséquent sur la carte une teinte plus foncée.

Les lignes de faîte, les thalwegs et les cols se reconnaissent aussi facilement sur une carte à hachures que sur une carte à courbes de niveau.

§ 5. — Résolution de quelques problèmes sur le terrain.

470. — Au lieu de mesurer les longueurs ou les angles sur un plan, il est préférable, quand on veut obtenir un résultat précis, de se servir de la trigonométrie. Nous allons traiter successivement quelques problèmes très simples qui se présentent souvent sur le terrain, et qui fournissent des applications intéressantes.

Problème I

Calculer la hauteur d'une tour ou d'un arbre dont le pied est accessible (*fig* 359).

Fig. 359.

Soit B le sommet de la tour ou de l'arbre, et C sa projection sur le terrain supposé horizontal. Plaçons-nous avec un graphomètre en un point A; mesurons l'angle BAC et la distance AC. Dans le triangle rectangle ABC, on aura :

$$BC = AC \operatorname{tg} A.$$

A la hauteur ainsi calculée, on devra d'ailleurs ajouter la hauteur du graphomètre.

Exemple. — Le graphomètre a $1^m,25$; on a $AC = 57^m,85$ et $B = 43°,7'$.

On trouve pour la hauteur de la tour $55^m,41$.

Problème II

Calculer la hauteur du sommet d'un édifice ou d'une montagne dont le pied est inaccessible (*fig.* 360).

Soit A le sommet de l'édifice ou de la montagne, et B sa projection, supposée inaccessible, sur le terrain horizontal.

Mesurons une base CD et les angles ACB, ADB, ACD, ADC.

Le triangle ACD donne :

$$AC = CD \times \frac{\sin ADC}{\sin CAD},$$

avec $\widehat{CAD} = 180° - \widehat{ACD} - \widehat{ADC}$; le triangle ACB donne ensuite :

$$AB = AC \sin ACB = CD \frac{\sin ADC \times \sin ACB}{\sin CAD}.$$

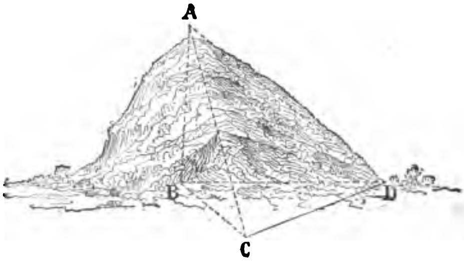


Fig. 360.

On aurait de même :

$$AB = CD \frac{\sin ACD \times \sin ADB}{\sin CAD},$$

ce qui fournira une vérification.

A la hauteur ainsi calculée, on devra d'ailleurs ajouter la hauteur du graphomètre.

PROBLÈME III

Calculer la distance d'un point B à un autre A supposé inaccessible, mais visible (*fig.* 361).

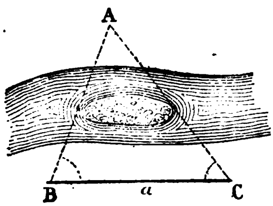


Fig. 361.

On mesurera une base BC, ainsi que les angles ABC, BCA.

Le triangle ABC donnera alors :

$$AB = \frac{BC \sin BCA}{\sin BAC},$$

$$B\hat{A}C = 180^\circ - A\hat{B}C - B\hat{C}A.$$

PROBLÈME IV

Calculer la distance de deux points A et B inaccessibles, mais visibles (*fig.* 362).

Mesurons une base CD, qui n'a pas besoin d'être dans un même plan avec AB; mesurons aussi les angles $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$, $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$, $B\hat{D}C$.

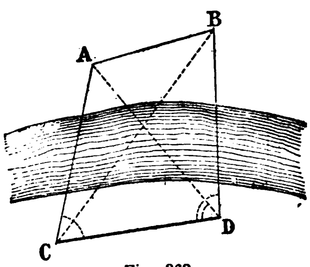


Fig. 362.

Le triangle ACD donne :

$$AC = CD \frac{\sin ADC}{\sin CAD},$$

$$C\hat{A}D = 180^\circ - A\hat{D}C - A\hat{C}D;$$

le triangle BCD donne aussi :

$$BC = CD \frac{\sin BDC}{\sin CBD}, \quad C\hat{B}D = 180^\circ - B\hat{D}C - B\hat{C}D.$$

Enfin, le triangle ACB donne :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times BC \times \cos ACB$$

$$= \overline{CD}^2 \left[\frac{\sin^2 ADC}{\sin^2 CAD} + \frac{\sin^2 BDC}{\sin^2 CBD} - 2\frac{\sin ADC \sin BDC \cos ACB}{\sin CAD \sin CBD}\right],$$

d'où :

$$AB = CD\sqrt{\frac{\sin^2 ADC}{\sin^2 CAD} + \frac{\sin^2 BDC}{\sin^2 CBD} - 2\frac{\sin ADC \sin BDC}{\sin CAD \sin CBD}\cos ACB}.$$

On aurait de même, en se servant du triangle BCD .

$$AB = CD\sqrt{\frac{\sin^2 ACD}{\sin^2 CAD} + \frac{\sin^2 BCD}{\sin^2 CBD} - 2\frac{\sin ACD \sin BCD}{\sin CAD \sin CBD}\cos ADB},$$

ce qui fournira une vérification.

Exemple. — $CD = 245^m$.

$\widehat{ACB} = 30°15'$, $\widehat{ACD} = 105°25'$, $\widehat{BCD} = 75°10'$,
$\widehat{ADB} = 27°8'$, $\widehat{ADC} = 60°20'$, $\widehat{BDC} = 87°28'$.

On a d'abord :

$$\widehat{CAD} = 14°15', \quad \widehat{CBD} = 17°22';$$

et l'on trouve par la première formule :

$$AB = 441^m{,}7,$$

et par la seconde :

$$AB = 441^m{,}8.$$

TABLE DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

DES ANGLES DE 0° A 90°

AVEC QUATRE DÉCIMALES

0° à 5°.

Angle.	Sinus.	1/Sinus.	Tang.	1/Tang.	1/Cosinus.	Cosinus.	
	0,		0,				
0°	0000	∞	0000	∞	1,0000	1,0000	**90°**
10′	0029	343,7752	0029	343,7737	1,0000	1.0000	50′
20′	0058	171,8883	0058	171,8854	1,0000	1,0000	40′
30′	0087	114,5930	0087	114,5887	1,0000	1,0000	30′
40′	0116	85,9456	0116	85,9398	1,0001	0,9999	20′
50′	0145	68,7574	0145	68,7501	1,0001	0,9999	10′
1°	0175	57,2987	0175	57,2900	1,0002	0,9998	**89°**
10′	0204	49,1141	0204	49,1039	1,0002	0,9998	50′
20′	0233	42,9757	0233	42,9641	1,0003	0,9997	40′
30′	0262	38,2016	0262	38,1885	1,0003	0,9997	30′
40′	0291	34,3823	0291	34,3678	1,0004	0,9996	20′
50′	0320	31,2576	0320	31,2416	1,0005	0,9995	10′
2°	0349	28,6537	0349	28,6363	1,0006	0,9994	**88°**
10′	0378	26,4505	0378	26,4316	1,0007	0,9993	50′
20′	0407	24,5621	0407	24,5418	1,0008	0,9992	40′
30′	0436	22,9256	0437	22,9038	1,0010	0,9990	30′
40′	0465	21,4937	0466	21,4704	1,0011	0,9989	20′
50′	0494	20,2303	0495	20,2056	1,0012	0,9988	10′
3°	0523	19,1073	0524	19,0811	1,0014	0,9986	**87°**
10′	0552	18,1026	0553	18,0750	1,0015	0,9985	50′
20′	0581	17,1984	0582	17,1693	1,0017	0,9983	40′
30′	0610	16,3804	0612	16,3499	1,0019	0,9981	30′
40′	0640	15,6368	0641	15,6048	1,0021	0,9980	20′
50′	0669	14,9579	0670	14,9244	1,0022	0,9978	10′
4°	0698	14,3356	0699	14,3007	1,0024	0,9976	**86°**
10′	0727	13,7631	0729	13,7267	1,0027	0,9974	50′
20′	0756	13,2347	0758	13,1969	1,0029	0,9971	40′
30′	0785	12,7455	0787	12,7062	1,0031	0,9969	30′
40′	0814	12,2913	0816	12,2505	1,0033	0,9967	20′
50′	0843	11,8684	0846	11,8262	1,0036	0,9964	10′
5°	0872	11,4737	0875	11,4301	1,0038	0,9962	**85°**
	0,		0,				
	Cosinus.	1/Cosinus.	1/Tang.	Tang.	1/Sinus.	Sinus.	Angle.

85° à 90°.

5° à 10°.

Angle.	Sinus.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	Cosinus.	
	0,		0,			0,	
5°	0872	11,4737	0875	11,4301	1,0038	9962	**85°**
10′	0901	11,1045	0904	11,0594	1,0041	9959	50′
20′	0929	10,7585	0934	10,7119	1,0043	9957	40′
30′	0958	10,4334	0963	10,3854	1,0046	9954	30′
40′	0987	10,1275	0992	10,0780	1,0049	9951	20′
50′	1016	9,8391	1022	9,7882	1,0052	9948	10′
6°	1045	9,5668	1051	9,5144	1,0055	9945	**84°**
10′	1074	9,3092	1080	9,2553	1,0058	9942	50′
20′	1103	9,0652	1110	9,0098	1,0061	9939	40′
30′	1132	8,8337	1139	8,7769	1,0065	9936	30′
40′	1161	8,6138	1169	8,5555	1,0068	9932	20′
50′	1190	8,4047	1198	8,3450	1,0072	9929	10′
7°	1219	8,2055	1228	8,1443	1,0075	9925	**83°**
10′	1248	8,0156	1257	7,9530	1,0079	9922	50′
20′	1276	7,8344	1287	7,7704	1,0082	9918	40′
30′	1305	7,6613	1317	7,5958	1,0086	9914	30′
40′	1334	7,4957	1346	7,4287	1,0090	9911	20′
50′	1363	7,3372	1376	7,2687	1,0094	9907	10′
8°	1392	7,1853	1405	7,1154	1,0098	9903	**82°**
10′	1421	7,0396	1435	6,9682	1,0102	9899	50′
20′	1449	6,8998	1465	6,8269	1,0107	9894	40′
30′	1478	6,7655	1495	6,6912	1,0111	9890	30′
40′	1507	6,6363	1524	6,5606	1,0116	9886	20′
50′	1536	6,5121	1554	6,4348	1,0120	9881	10′
9°	1564	6,3925	1584	6,3138	1,0125	9877	**81°**
10′	1593	6,2772	1614	6,1970	1,0129	9872	50′
20′	1622	6,1661	1644	6,0844	1,0134	9868	40′
30′	1650	6,0589	1673	5,9758	1,0139	9863	30′
40′	1679	5,9554	1703	5,8708	1,0144	9858	20′
50′	1708	5,8554	1733	5,7694	1,0149	9853	10′
10°	1736	5,7588	1763	5,6713	1,0154	9848	**80°**
	0,		0,			0,	
	Cosinus.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Sinus.	Angle.

80° à 85°.

10° à 15°.

Angle.	Sinus.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	Cosinus.	
	0,		0,			0,	
10°	1736	5,7588	1763	5,6713	1,0154	9848	**80°**
10′	1765	5,6653	1793	5,5764	1,0160	9843	50′
20′	1794	5,5749	1823	5,4845	1,0165	9838	40′
30′	1822	5,4874	1853	5,3955	1,0170	9833	30′
40′	1851	5,4026	1883	5,3093	1,0176	9827	20′
50′	1880	5,3205	1914	5,2257	1,0181	9822	10′
11°	1908	5,2408	1944	5,1446	1,0187	9816	**79°**
10′	1937	5,1636	1974	5,0658	1,0193	9811	50′
20′	1965	5,0886	2004	4,9894	1,0199	9805	40′
30′	1994	5,0159	2035	4,9152	1,0205	9799	30′
40′	2022	4,9452	2065	4,8430	1,0211	9793	20′
50′	2051	4,8765	2095	4,7729	1,0217	9787	10′
12°	2079	4,8097	2126	4,7046	1,0223	9781	**78°**
10′	2108	4,7448	2156	4,6382	1,0230	9774	50′
20′	2136	4,6817	2186	4,5736	1,0236	9769	40′
30′	2164	4,6202	2217	4,5107	1,0243	9763	30′
40′	2193	4,5604	2247	4,4494	1,0249	9757	20′
50′	2221	4,5022	2278	4,3897	1,0256	9750	10′
13°	2250	4,4454	2309	4,3315	1,0263	9744	**77°**
10′	2278	4,3901	2339	4,2747	1,0270	9737	50′
20′	2306	4,3362	2370	4,2193	1,0277	9730	40′
30′	2334	4,2837	2401	4,1653	1,0284	9724	30′
40′	2363	4,2324	2432	4,1126	1,0291	9717	20′
50′	2391	4,1824	2462	4,0611	1,0299	9710	10′
14°	2419	4.1336	2493	4,0108	1,0306	9703	**76°**
10′	2447	4,0859	2524	3,9617	1,0314	9696	50′
20′	2476	4,0394	2555	3,9136	1,0321	9689	40′
30′	2504	3,9939	2586	3,8667	1,0329	9681	30′
40′	2532	3,9495	2617	3,8208	1,0337	9674	20′
50′	2560	3.9061	2648	3,7760	1,0345	9667	10′
15°	2588	3,8637	2679	3,7321	1,0353	9659	**75°**
	0,		0,			0,	
	Cosinus.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Sinus.	Angle.

75° à 80°.

15° à 20°.

Angle.	Sinus.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	Cosinus.	
	0,		0,			0,	
15°	2588	3,8637	2679	3,7321	1,0353	9659	**75°**
10′	2616	3,8222	2711	3,6891	1,0361	9652	50′
20′	2644	3,7817	2742	3,6470	1,0369	9644	40′
30′	2672	3,7420	2773	3,6059	1,0377	9636	30′
40′	2700	3,7032	2805	3,5656	1,0386	9628	20′
50′	2728	3,6652	2836	3,5261	1,0394	9621	10′
16°	2756	3,6280	2867	3,4874	1,0403	9613	**74°**
10′	2784	3,5915	2899	3,4495	1,0412	9605	50′
20′	2812	3,5559	2931	3,4124	1,0421	9596	40′
30′	2840	3,5209	2962	3,3759	1,0429	9588	30′
40′	2868	3,4867	2994	3,3402	1,0439	9580	20′
50′	2896	3,4532	3026	3,3052	1,0448	9572	10′
17°	2924	3,4203	3057	3,2709	1,0457	9563	**73°**
10′	2952	3,3881	3089	3,2371	1,0466	9555	50′
20′	2979	3,3565	3121	3,2041	1,0476	9546	40′
30′	3007	3,3255	3153	3,1716	1,0485	9537	30′
40′	3035	3,2951	3185	3,1397	1,0495	9528	20′
50′	3062	3,2653	3217	3,1084	1,0505	9520	10′
18°	3090	3,2361	3249	3,0777	1,0515	9511	**72°**
10′	3118	3,2074	3281	3,0475	1,0525	9502	50′
20′	3145	3,1792	3314	3,0178	1,0535	9492	40′
30′	3173	3,1515	3346	2,9887	1,0545	9483	30′
40′	3201	3,1244	3378	2,9600	1,0555	9474	20′
50′	3228	3,0977	3411	2,9319	1,0566	9465	10′
19°	3256	3,0716	3443	2,9042	1,0576	9455	**71°**
10′	3283	3,0458	3476	2,8770	1,0587	9446	50′
20′	3311	3,0206	3508	2,8502	1,0598	9436	40′
30′	3338	2,9957	3541	2,8239	1,0608	9426	30′
40′	3365	2,9713	3574	2,7980	1,0619	9417	20′
50′	3393	2,9474	3607	2,7725	1,0631	9407	10′
20°	3420	2,9238	3640	2,7475	1,0642	9397	**70°**
	0,		0,			0,	
	Cosinus.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Sinus.	Angle.

70° à 75°.

20° à 25°.

Angle.	Sinus.	1/Sinus.	Tang.	1/Tang.	1/Cosinus.	Cosinus.	
	0,		0,			0,	
20°	3420	2,9238	3640	2,7475	1,0642	9397	**70°**
10′	3448	2,9006	3673	2,7228	1,0653	9387	50′
20′	3475	2,8779	3706	2,6985	1,0665	9377	40′
30′	3502	2,8555	3739	2,6746	1,0676	9367	30′
40′	3529	2,8334	3772	2,6511	1,0688	9356	20′
50′	3557	2,8117	3805	2,6279	1,0700	9346	10′
21°	3584	2,7904	3839	2,6051	1,0711	9336	**69°**
10′	3611	2,7695	3872	2,5826	1,0723	9325	50′
20′	3638	2,7488	3906	2,5605	1,0736	9315	40′
30′	3665	2,7285	3939	2,5386	1,0748	9304	30′
40′	3692	2,7085	3973	2,5172	1,0760	9293	20′
50′	3719	2,6888	4006	2,4960	1,0773	9283	10′
22°	3746	2,6695	4040	2,4751	1,0785	9272	**68°**
10′	3773	2,6504	4074	2,4545	1,0798	9261	50′
20′	3800	2,6316	4108	2,4342	1,0811	9250	40′
30′	3827	2,6131	4142	2,4142	1,0824	9239	30′
40′	3854	2,5949	4176	2,3945	1,0838	9228	20′
50′	3881	2,5770	4210	2,3750	1,0850	9216	10′
23°	3907	2,5593	4245	2,3559	1,0864	9205	**67°**
10′	3934	2,5419	4279	2,3369	1,0877	9194	50′
20′	3961	2,5247	4314	2,3183	1,0891	9182	40′
30′	3987	2,5078	4348	2,2998	1,0904	9171	30′
40′	4014	2,4912	4383	2,2817	1,0918	9159	20′
50′	4041	2,4748	4417	2,2637	1,0932	9147	10′
24°	4067	2,4586	4452	2,2460	1,0946	9135	**66°**
10′	4094	2,4426	4487	2,2286	1,0961	9124	50′
20′	4120	2,4269	4522	2,2113	1,0975	9112	40′
30′	4147	2,4114	4557	2,1943	1,0989	9100	30′
40′	4173	2,3961	4592	2,1775	1,1004	9088	20′
50′	4200	2,3811	4628	2,1609	1,1019	9075	10′
25°	4226	2,3662	4663	2,1445	1,1034	9063	**65°**
	0,		0,			0,	
	Cosinus.	1/Cosinus.	1/Tang.	Tang.	1/Sinus.	Sinus.	Angle.

65° à 70°.

25° à 30°.

Angle.	Sinus.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	Cosinus.	
	0,		0,			0,	
25°	4226	2,3662	4663	2,1445	1,1034	9063	**65°**
10′	4253	2,3515	4699	2,1283	1,1049	9051	50′
20′	4279	2,3371	4734	2,1123	1,1064	9038	40′
30′	4305	2,3228	4770	2,0965	1,1079	9026	30′
40′	4331	2,3088	4806	2,0809	1,1095	9013	20′
50′	4358	2,2949	4841	2,0655	1,1110	9001	10′
26°	4384	2,2812	4877	2,0503	1,1126	8988	**64°**
10′	4410	2,2677	4913	2,0353	1,1142	8975	50′
20′	4436	2,2543	4950	2,0204	1,1158	8962	40′
30′	4462	2,2412	4986	2,0057	1,1174	8949	30′
40′	4488	2,2282	5022	1,9912	1,1190	8936	20′
50′	4514	2,2153	5059	1,9768	1,1207	8923	10′
27°	4540	2,2027	5095	1,9626	1,1223	8910	**63°**
10′	4566	2,1902	5132	1,9486	1,1240	8897	50′
20′	4592	2,1779	5169	1,9347	1,1257	8884	40′
30′	4617	2,1657	5206	1,9210	1,1274	8870	30′
40′	4643	2,1537	5243	1,9074	1,1291	8857	20′
50′	4669	2,1418	5280	1,8940	1,1308	8843	10′
28°	4695	2,1301	5317	1,8807	1,1326	8829	**62°**
10′	4720	2,1185	5354	1,8676	1,1343	8816	50′
20′	4746	2,1070	5392	1,8546	1,1361	8802	40′
30′	4772	2,0957	5430	1,8418	1,1379	8788	30′
40′	4797	2,0846	5467	1,8291	1,1397	8774	20′
50′	4823	2,0736	5505	1,8165	1,1415	8760	10′
29°	4848	2,0627	5543	1,8040	1,1434	8746	**61°**
10′	4874	2,0519	5581	1,7917	1,1452	8732	50′
20′	4899	2,0413	5619	1,7796	1,1471	8718	40′
30′	4924	2,0308	5658	1,7675	1,1490	8704	30′
40′	4950	2,0204	5696	1,7556	1,1509	8689	20′
50′	4975	2,0101	5735	1,7437	1,1528	8675	10′
30°	5000	2,0000	5773	1,7321	1,1547	8660	**60°**
	0,		0,			0,	
	Cosinus.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Sinus.	Angle.

60° à 65°.

30° à 35°.

Angle.	Sinus.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	Cosinus.	
	0,		0,			0,	
30°	5000	2,0000	5773	1,7321	1,1547	8660	**60°**
10′	5025	1,9900	5812	1,7205	1,1566	8646	50′
20′	5050	1,9801	5851	1,7090	1,1586	8631	40′
30′	5075	1,9703	5890	1,6977	1,1606	8616	30′
40′	5100	1,9606	5930	1,6864	1,1626	8601	20′
50′	5125	1,9511	5969	1,6753	1,1646	8587	10′
31°	5150	1,9416	6009	1,6643	1,1666	8572	**59°**
10′	5175	1,9323	6048	1,6534	1,1687	8557	50′
20′	5200	1,9230	6088	1,6426	1,1707	8542	40′
30′	5225	1,9139	6128	1,6319	1,1728	8526	30′
40′	5250	1,9048	6168	1,6212	1,1749	8511	20′
50′	5275	1,8959	6208	1,6107	1,1770	8496	10′
32°	5299	1,8871	6249	1,6003	1,1792	8480	**58°**
10′	5324	1,8783	6289	1,5900	1,1813	8465	50′
20′	5348	1,8697	6330	1,5798	1,1835	8450	40′
30′	5373	1,8612	6371	1,5697	1,1857	8434	30′
40′	5398	1,8527	6412	1,5597	1,1879	8418	20′
50′	5422	1,8443	6453	1,5497	1,1901	8403	10′
33°	5446	1,8361	6494	1,5399	1,1924	8387	**57°**
10′	5471	1,8279	6536	1,5301	1,1946	8371	50′
20′	5495	1,8198	6577	1,5204	1,1969	8355	40′
30′	5520	1,8118	6619	1,5108	1,1992	8339	30′
40′	5544	1,8039	6661	1,5013	1,2015	8323	20′
50′	5568	1,7960	6703	1,4919	1,2039	8307	10′
34°	5592	1,7883	6745	1,4826	1,2062	8290	**56°**
10′	5616	1,7806	6787	1,4733	1,2086	8274	50′
20′	5640	1,7730	6830	1,4641	1,2110	8258	40′
30′	5664	1,7655	6873	1,4550	1,2134	8241	30′
40′	5688	1,7581	6916	1,4460	1,2158	8225	20′
50′	5712	1,7507	6959	1,4370	1,2183	8208	10′
35°	5736	1,7434	7002	1,4281	1,2208	8192	**55°**
	0,		0,			0,	
	Cosinus.	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$.	$\frac{1}{\text{Tang.}}$.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sinus}}$.	Sinus.	Angle.

55° à 60°.